C. DUMITRESCU FL. SMARANDACHE

METODE DE CALCUL ÎN ANALIZA MATEMATICĂ

TEORIE ȘI PROBLEME

PROBLEME
de
MATEMATICA si FIZICA
SERIE PENTRU LICEU

EDITURA INFOMED

Craiova - 1996

METODE DE CALCUL

ÎN

ANALIZA MATEMATICĂ

Teorie și probleme

Referenți științifici:

Lect.dr. Paul Popescu
Prof. Gheorghe Constantin

METODE DE CALCUL

ÎN

ANALIZA MATEMATICĂ

Teorie și probleme

C. Dumitrescu Fl. Smarandache

Editura INFOMED

Craiova 1995

METODE DE CALCUL ÎN
ANALIZA MATEMATICĂ.
C. Dumitrescu , Fl. Smarandache

ISBN : 973 - 96940 -0 - 4

Editura INFOMED Craiova
Calea București
bl. b4, sc. 1, ap. 4.
Tel. 051 / 416759

Consilier editorial: Ing. Saul Pasăre

Tehnoredactare computerizată:
Constantin Antoniu Dumitrescu

Motto: Iubirea este ţelul,porunca sacr-a firii.
Mânaţi de ea vulturii se caută prin spaţii,
Delfinele iau marea în piept să-şi afle mirii
Chiar stelele în ceruri se-njugă-n constelaţii.

(Vasile Voiculescu)

CUVANT INAINTE

Ne bucurăm exprimând mulţumirile noastre faţă de toţi acei,cunoscuţi sau mai puţin cunoscuţi,care de-a lungul anilor ne-au ajutat să ajungem la această carte. Sunt mulţi,sunt foarte mulţi cei care ne-au ajutat... Unii ne-au dat sugestii,alţii ne-au oferit idei, uneori ne-am străduit împreună să descifrăm un amănunt nelămurit, alteori învăţam din întrebările meşteşugite sau poate chiar naive ale interlocutorilor noştrii.

Devenirea spre această carte este un foarte bun exemplu de altruism,de bunătate şi dăruire,de mers împreună pe drumul descoperirii frumuseţilor vieţii.

Cine gândeşte nu doar la mama sa şi la tatăl său,la sine şi la familia sa,descoperă o familie mult mai mare,descoperă pretu-,

tindeni viața,pe care începe să o iubească tot mai mult în toate formele ei de manifestare.

Matematica ne ajută pe acest drum,solicitându-ne și îmbogățindu-ne nu doar capacitățile intelectuale,gândirea,logica și algoritmii noștrii de decizie,dar în multe feluri contribuie și la îmbogățirea noastră sufletească.Ne ajută să facem ordine și lumină acolo unde la început simțeam că este posibilă doar o evoluție empirică - în noi înșine.

Pentru elevi și profesori,pentru candidații la concursul de admitere în învățământul superior,pentru toți cei interesați,oferim această succesiune de metode întîlnite în studiul analizei matematice de liceu,care să le permită reducerea a cât mai diverse probleme noi la cât mai multe scheme de lucru deja cunoscute.

Am urmărit prezentarea într-o manieră metodică,avantajoasă pentru cititor,a celor mai frecvente metode de calcul întâlnite în studiul analizei matematice la acest nivel.

Astfel,în această carte puteți găsi:

- metode pentru demonstrarea egalităților de mulțimi,
- metode pentru demonstrarea bijectivității funcțiilor,
- metode pentru studiul monotoniei șirurilor și funcțiilor,
- metode comune pentru calculul limitelor de șiruri și de funcții,
- metode specifice pentru calculul limitelor de șiruri,
- metode pentru studiul continuității și a derivabilității,
- metode pentru a determina existența rădăcinilor unei ecuații,
- aplicații ale teoremelor lui Fermat,Rolle,Lagrange,Cauchy,

- metode pentru demonstrarea unor egalităţi şi inegalităţi,
- metode pentru a arăta că o funcţie are primitive,
- metode pentru a arăta că o funcţie nu are primitive,
- metode pentru a arăta că o funcţie este integrabilă,
- metode pentru a arăta că o funcţie nu este ingrabilă.

Pentru îmbunătăţirea acestei prezentări suntem bucuroşi să primin sugestiile şi observaţiile dumneavoastră.

C. Dumitrescu, Căsuţa Poştală 811
Craiova (1100),Romania

F. Smarandache, P.O. Box 42561
Phoenix,Arizona,U.S.A.

CUPRINS

1. TEORIA MULTIMILOR

O mulţime este determinată cu ajutorul uneia sau mai multe proprietăţi pe care cerem să le satisfacă elementele sale.

Cu această definiţie s-ar părea că putem considera ca mulţime orice totalitate de obiecte. Totuşi lucrurile nu stau aşa.

Dacă presupunem, prin absurd, că orice totalitate de obiecte formează o mulţime atunci totalitatea mulţimilor ar forma la rândul ei o mulţime, pe care să o notăm de exemplu cu M. Dar atunci şi familia $\mathfrak{P}(M)$ a părţilor sale ar forma o mulţime. Am avea deci $\mathfrak{P}(M) \in M$.

Notând prin card M numărul elementelor lui M, vom avea :

$$\text{card } \mathfrak{P}(M) \le \text{card } M$$

Dar o teoremă datorată lui Cantor arată că avem întotdeauna

$$\text{card } M < \text{card } \mathfrak{P}(M)$$

Prin urmare, în mod surprinzător poate, nu orice totalitate de obiecte poate fi considerată mulţime.

DEFINITIE: Se numeşte mulţime totală, notată cu T , mulţimea obiectelor matematice cu care se lucrează la un moment dat.

De exemplu,

- desenând mulţimi pe foaia de caiet, mulţimea totală este foaia de caiet;
- desenând mulţimi pe tablă, mulţimea totală este mulţimea punctelor tablei.

Prin urmare mulţimea totală nu este unică, ea depinde de felul obiectelor matematice cu care lucrăm la un moment dat.

În diagramele următoare vom reprezenta mulţimea totală printr-un dreptunghi, iar submulţimile lui T prin suprafeţe interioare acestui dreptunghi. O astfel de diagramă se numeşte diagramă Euler-Venn.

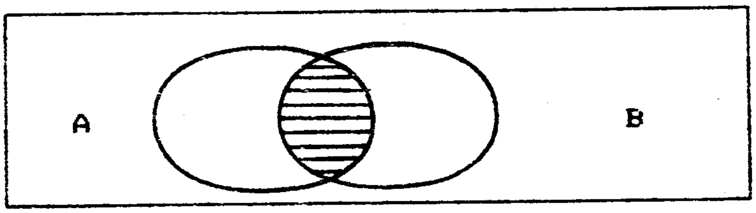
Avem în vedere următoarele operaţii cu mulţimi :

1. *INTERSECTIA.*

$$A \cap B = \{ x \in T \mid x \in A \text{ şi } x \in B \}$$

Deoarece la un moment dat lucrăm doar cu elemente din T , condiţia $x \in T$ poate fi subânţeleasă, deci putem scrie:

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ şi } x \in B \}$$



$A \cap B$

Mai general,

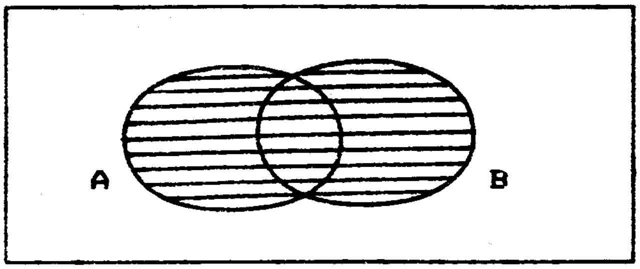
$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{\ x \mid \forall\ i \in \mathbb{N},\ x_i \in A\ \}$$

Să observăm că:

$$x \notin A \cap B \iff x \notin A \text{ sau } x \notin B$$

2. *REUNIUNEA*.

$$A \cup B = \{\ x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\ \}$$



$A \cup B$

Ca și în cazul intersecției, putem considera:

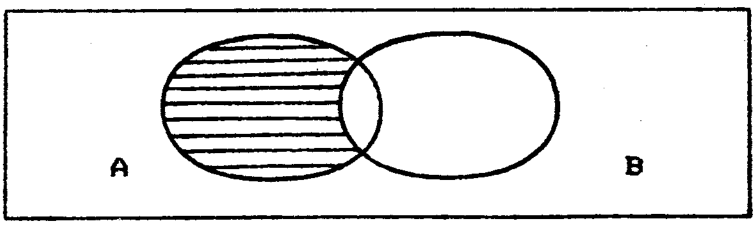
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{\ x \mid \exists\ i \in \mathbb{N},\ x_i \in A\ \}$$

Se observă că:

$$x \notin A \cup B \iff x \notin A \text{ și } x \notin B$$

3. *DIFERENȚA*.

$$A - B = \{\ x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\ \}$$



$A - B = C_A B$

Reținem că:

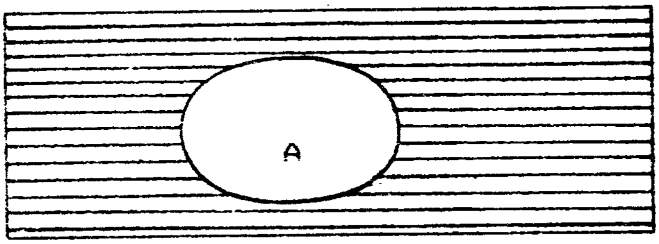
$$x \notin A - B \iff x \notin A \text{ sau } x \in B$$

4. *COMPLEMENTARA.*

Complementara unei mulţimi A este diferenţa dintre mulţimea totală şi A.

$$C_T A = \{ x \mid x \in T \text{ şi } x \notin A \} = \{ x \mid x \notin A \}$$

Complementara unei mulţimi se mai notează cu CA sau cu $\overline{A}$.



C A

Să observăm că

$$x \notin CA \iff x \in A$$

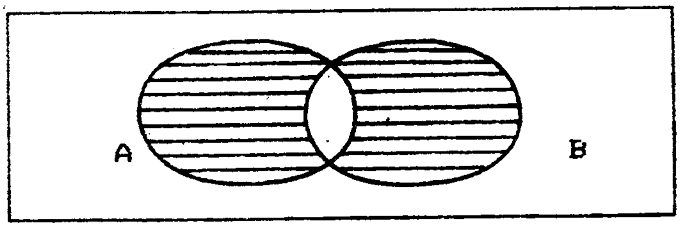
Mai general, putem vorbi de complementara unei mulţimi faţă de o altă mulţime,oarecare. Astfel,

$$C_A B = \{ x \mid x \in B \text{ şi } x \notin A \}$$

este complementara mulţimii B faţă de mulţimea A.

5. *DIFERENTA SIMETRICA.*

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$



A Δ B

Avem $x \notin A \Delta B \iff x \notin A - B$ şi $x \notin B - A$.

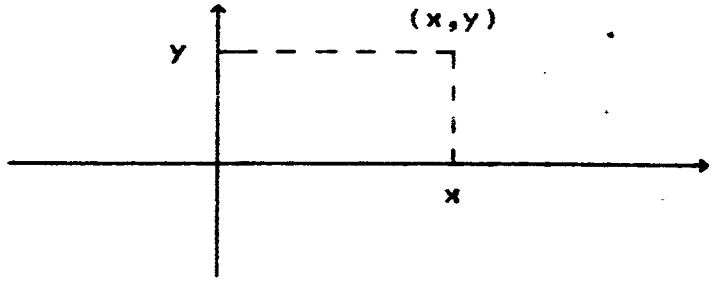
6. *PRODUSUL CARTEZIAN.*

$$A \times B = \{ (x,y) \mid x \in A \text{ şi } y \in B \}$$

Produsul cartezian a două mulţimi este deci o mulţime de <u>pe-</u>

rechi ordonate de elemente, primul element fiind din prima mulţime, iar al doilea element fiind din a doua mulţime.

De exemplu, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ (x,y) \mid x \in \mathbb{R} , y \in \mathbb{R} \}$, iar o imagine intuitivă a acestei mulţimi este dată în figura 1.1.



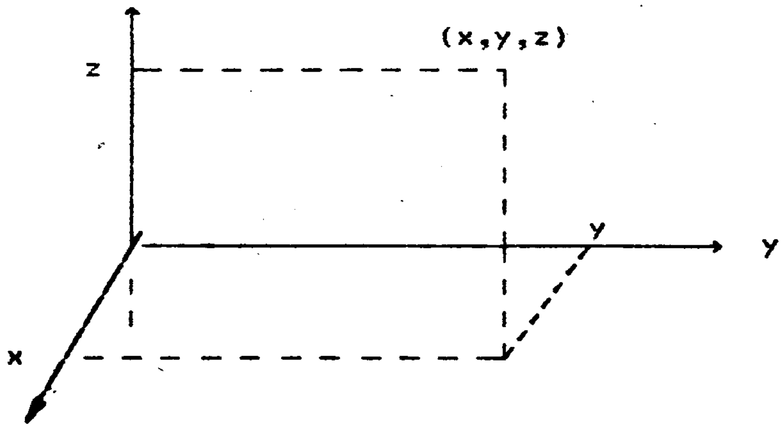
$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Fig. 1.1

Prin analogie, produsul cartezian a trei mulţimi este o mulţime de triplete:

$$A \times B \times C = \{ (x,y,z) \mid x \in A , y \in B , z \in C \}$$

O imagine intuitivă a lui $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ este dată în figura de mai jos.



$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Fig. 1.2

Mai general,

$$\mathop{X}_{i=1}^{n} A_i = \{ (x_1,x_2,\ldots,x_n) \mid x_i \in A_i \text{ pentru orice } i \in \overline{1,n} \}$$

METODE PENTRU DEMONSTRAREA EGALITATII A DOUA MULTIMI

Dificultăţile şi surprizele întâlnite încercând să definim riguros noţiunea de mulţime nu sânt singurele din teoria mulţimilor.

O altă surpriză este că binecunoscutul (şi intuitiv evidentul) procedeu de demonstrare a egalităţii a două mulţimi prin dubla incluziune este - la nivelul definirii riguroase a mulţimilor - doar o axiomă.

$$A = B \iff A \subseteq B \text{ şi } B \subseteq A \qquad (1.1)$$

Acceptând această axiomă, vom exemplifica în cele ce urmează următoarele două metode pentru demonstrarea egalităţilor de mulţimi:

(A) DUBLA INCLUZIUNE (exprimată prin echivalenţa (1.1))

(B) UTILIZAREA FUNCTIEI CARACTERISTICE A UNEI MULŢIMI

Dăm mai întâi câteva detalii ale acestei a doua metode, care în practică este mult mai rapidă, deci mai comod de utilizat decât prima metodă.

DEFINITIE. Se numeşte funcţie caracteristică a mulţimii A funcţia $\varphi_A : T \longrightarrow \{0,1\}$ definită prin :

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \in A \\ 0 & \text{dacă } x \notin A \end{cases}$$

După cum se observă numerele 0 şi 1 folosesc pentru a împărţi elementele mulţimii totale T în două categorii:

(1) o categorie conţine acele elemente x în care valoarea lui φ_A este 1 (elementele lui A) ,

(2) din a doua categorie fac parte acele elemente în

care valoarea lui φ_A este 0 (elementele care nu sunt în A).

Procedeul (B) de demonstrare a egalității a două mulțimi se bazează pe faptul că orice mulțime este determinată în mod unic de funcția sa caracteristică, în sensul că:

existǎ o bijecție de la mulțimea $\mathfrak{P}(T)$ a submulțimilor lui T la mulțimea $\mathfrak{F}(T)$ a funcțiilor caracteristice definite pe T. (vezi exercițiul VII)

Așadar,

$$A = B \iff \varphi_A = \varphi_B \tag{1.2}$$

PROPRIETATI ALE FUNCTIEI CARACTERISTICE

φ_1) $\varphi_{A\cap B}(x) = \varphi_A(x)\cdot\varphi_B(x)$

φ_2) $\varphi_{A\cup B}(x) = \varphi_A(x) + \varphi_B(x) - \varphi_{A\cap B}(x)$

φ_3) $\varphi_{A-B}(x) = \varphi_A(x) - \varphi_{A\cap B}(x)$

φ_4) $\varphi_{CA}(x) = 1 - \varphi_A(x)$

φ_5) $\varphi_{A\Delta B}(x) = \varphi_A(x) + \varphi_B(x) - 2\cdot\varphi_{A\cap B}(x)$

φ_6) $\varphi_{A\times B}(x,y) = \varphi_A(x)\cdot\varphi_B(y)$

φ_7) $\varphi_A^2(x) = \varphi_A(x)$

φ_8) $\varphi_\emptyset(x) \equiv 0$, $\varphi_T(x) \equiv 1$

φ_9) $A \subseteq B \iff \varphi_A(x) \le \varphi_B(x)$ pentru orice $x \in T$.

Să demonstrăm de exemplu φ_1). Pentru aceasta să observăm că mulțimea totală T este împărțită de mulțimile A și B în cel mult patru regiuni :

1) pentru punctele x care nu aparțin nici lui A nici lui B avem $\varphi_A(x) = \varphi_B(x) = 0$ și $\varphi_{A\cap B}(x) = 0$.

2) pentru punctele x care sunt în A și nu sunt în B avem

$\varphi_A(x) = 1$, $\varphi_B(x) = 0$ şi $\varphi_{A\cap B}(x) = 0$.

3) dacă $x \notin A$ şi $x \in B$

4) dacă $x \in B$ şi $x \notin A$

egalităţile rezultă analog.

EXERCITII

I. Utilizând metodele (A) şi (B) arătaţi că :

1. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
2. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
3. $C(B \cap C) = CB \cup CC$
4. $C(B \cup C) = CB \cap CC$
5. $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$
6. $A \cup (B - A) = A \cup B$
7. $A - (A - B) = A \cap B$
8. $C(CB) = B$
9. $A \cup CA = T$, $A \cap CA = \emptyset$

REZOLVARI:

(A) (dubla incluziune)

Să observăm că pentru rezolvarea unei probleme de matematică răspundem succesiv la grupe de două intrebări :

(q) CE AVEM DE ARATAT ?

(Q) CUM ARATAM ?

Răspunzând la intrebarea (Q) putem ajunge la o nouă intrebare (q). Astfel, pentru exerciţiul 1 răspunsul la intrebarea (q) este:

(r_1) : avem de arătat o egalitate de mulţimi

iar răspunsul la intrebarea (Q) este :

(R_1) : putem arăta această egalitate prin două metode : utilizând dubla incluziune, sau utilizând proprietăţile funcţiei caracteristice.

Alegem prima metodă şi ajungem din nou la (q). De data aceasta răspunsul este :

(r_2) : avem de arătat două incluziuni,

iar răspunsul la întrebarea (Q) corespunzătoare este

(R_2) : arătăm pe rând câte o incluziune .

Apoi,

(r_3) : avem de arătat o incluziune

(R_3) : arătăm că un element arbitrar din "mulţimea inclusă" este în "mulţimea care include".

Sigur că de obicei tot acest raţionament este mental, rezolvitorul începe prin:

a) fie $x \in A - (B - C)$, oarecare [*pentru a continua citim ultima operatie (diferenta)*] , $\Longleftrightarrow$ $x \in A$ şi $x \notin B \cap C$ [*citim operatia devenita ultima (intersectia)*] $\Longleftrightarrow$

$$x \in A \text{ şi } \begin{cases} x \notin B \\ \text{sau} \\ x \notin C \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \in A \text{ şi } x \notin B \\ \text{sau} \\ x \in A \text{ şi } x \notin C \end{cases} \tag{1.3}$$

Din acest moment nu mai avem operaţii de explicitat şi putem regrupa enunţul la care am ajuns în mai multe feluri (multe implicaţii rezultă din (1.3), dar numai una ne interesează - concluzia exerciţiului) de aceea trebuie să actualizăm concluzia:

$$x \in (A - B) \cup (A - C) \Longleftrightarrow x \in A - B \text{ sau } x \in A - C$$

Observăm că din (1.3) rezultă imediat această concluzie, deci incluziunea este demonstrată.

Pentru a doua incluziune: fie $x \in (A - B) \cup (A - C)$, [*citim ultima operatie (reuniunea)*] $\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} x \in A - B \\ \text{sau} \\ x \in A - C \end{cases} \Longleftrightarrow \text{[\textit{citim operatia devenita ultima}]} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \in A \quad \text{şi} \quad x \notin B \\ \quad\quad \text{sau} \\ x \in A \quad \text{şi} \quad x \notin C \end{cases} \iff x \in A \quad \text{şi} \quad \begin{cases} x \notin B \\ \text{sau} \\ x \notin C \end{cases} \tag{1.4}$$

Nu mai avem operaţii de explicitat, deci detaliem concluzia la care vrem să ajungem: $x \in A - (B \cap C)$, **adică** $x \in A$ şi $x \notin B \cap C$, **afirmaţie care rezultă imediat din (1.4).**

5. (r_1) : avem **de arătat o egalitate de mulţimi**

(R_1) : arătăm două incluziuni

(r_2) : avem de arătat o incluziune

(R_2) : arătăm că fiecare element din mulţimea inclusă este în mulţimea care include.

Fie $x \in A - (A - B)$, oarecare [*citim ultima operatie (diferenta)*] $\iff$ $x \in A$ şi $x \notin A - B$ [*citim operatia care a devenit ultima*] $\iff$

$$x \in A \quad \text{şi} \quad \begin{cases} x \notin A \\ \text{sau} \\ x \in B \end{cases} \tag{1.5}$$

Nu mai avem operaţii **de explicitat, deci** reactualizăm concluzia:

$$x \in A \cap B \quad \text{adică} \quad x \in A \quad \text{şi} \quad x \in B.$$

Observăm că (1.5) **este echivalent** cu :

$$\begin{cases} x \in A \quad \text{şi} \quad x \notin A \\ \quad\quad \text{sau} \\ x \in A \quad \text{şi} \quad x \in B \end{cases}$$

Prima afirmaţie este falsă, **iar din a doua rezultă** $x \in A \cap B$.

Vom rezolva aceleaşi exerciţii utilizând proprietăţile funcţiei caracteristice şi echivalenţa (1.2).

1. **Avem de arătat că** $\varphi_{A-(B\cap C)} = \varphi_{(A-B)\cup(A-C)}$

(r_1) : **avem de arătat o egalitate de funcţii**

(R_1) : deoarece **domeniul şi codomeniul celor două funcţii**

coinçid, mai trebuie arătat că valorile lor coincid, adică

(r_2) : $\varphi_{A-(B\cap C)}(x) = \varphi_{(A-B)\cup(A-C)}(x)$ pentru orice $x \in T$

Răspunsul la întrebarea (Q) corespunzătoare este

(R_2) : explicităm ambii membri ai egalității precedente.

$\varphi_{A-(B\cap C)}(x) =$ [*citim ultima operatie (diferenta) si aplicam proprietatea* φ_3] $= \varphi_A(x) - \varphi_{A\cap(B\cap C)}(x) =$ [*citim operatia devenita ultima si aplicam proprietatea* φ_1] $=$

$$= \varphi_A(x) - \varphi_A(x).\varphi_B(x).\varphi_C(x) \qquad (1.6)$$

Membrul doi al egalității devine succesiv:

$\varphi_{(A-B)\cup(A-C)}(x) = \varphi_{A-B}(x) + \varphi_{A-C}(x) - \varphi_{(A-B)\cap(A-C)}(x) =$
$\left(\varphi_A(x) - \varphi_{A\cap B}(x) \right) + \left(\varphi_A(x) - \varphi_{A\cap C}(x) \right) - \varphi_{A-B}(x)\cdot\varphi_{A-C}(x) =$
$\left(\varphi_A(x) - \varphi_A(x)\cdot\varphi_B(x) \right) + \left(\varphi_A(x) - \varphi_A(x)\cdot\varphi_C(x) \right) -$
$- \left(\varphi_A(x) - \varphi_{A\cap B}(x) \right).\left(\varphi_A(x) - \varphi_{A\cap C}(x)\right) = 2.\varphi_A(x) - \varphi_A(x).\varphi_B(x) -$
$\varphi_A(x).\varphi_C(x) - \varphi_A^2(x) + \varphi_A(x)\cdot\varphi_{A\cap C}(x) + \varphi_A(x)\cdot\varphi_{A\cap B}(x) -$
$\varphi_A^2(x).\varphi_B(x).\varphi_C(x) = \varphi_A(x)\cdot\varphi_B(x)\cdot\varphi_C(x).$

5. Pentru a demonstra egalitatea $\varphi_{A-(A-B)}(x) = \varphi_{A\cap B}(x)$ observăm că :

$\varphi_{A-(A-B)}(x) = \varphi_A(x) - \varphi_{A\cap(A-B)}(x) = \varphi_A(x) - \varphi_A(x)\cdot\varphi_{A\cap B}(x) =$
$\varphi_A(x) - \varphi_A(x)\cdot\left(\varphi_A(x) - \varphi_{A\cap B}(x) \right) = \varphi_A(x) - \varphi_A(x)\cdot\left(\varphi_A(x) -\right.$
$\left.\varphi_A(x)\cdot\varphi_B(x) \right) = \varphi_A(x)\cdot\varphi_B(x) = \varphi_{A\cap B}(x).$

II. Arătați că :

1. $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times C)$
2. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
3. $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$
4. $A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C) = (A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C$

5. $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

6. $(A \Delta B) X C = (A X C) \Delta (B X C)$

REZOLVARI.

Metoda (A) (dubla incluziune)

1. Fie $x \in (A \cap B) X (C \cap D)$, oarecare [*explicitam ultima operatie (produsul scalar)*] <===> $x = (\alpha,\beta)$, cu $\alpha \in A \cap B$ şi $\beta \in C \cap D$ <===> [*explicitam operatiile care au devenit ultimele*] <===> $x = (\alpha,\beta)$ cu $\alpha \in A$, $\alpha \in B$ şi $\beta \in C$, $\beta \in D$ [*nu mai avem operatii de explicitat, de aceea actualizam concluzia:* $x \in (A X C) \cap (B X D)$, *deci x apartine unei intersectii (ultima operatie)*] <===> $x = (\alpha,\beta)$ cu $\alpha \in A$, $\beta \in C$ şi $\alpha \in B$, $\beta \in D$ <==> $x \in A X C$ şi $x \in B X D$.

3. Fie $x \in (A - B) X C$, oarecare <===> $x = (\alpha,\beta)$ cu $\alpha \in A - B$ şi $\beta \in C$ <===> $x = (\alpha,\beta)$ cu $\alpha \in A$ şi $\alpha \notin B$ şi $\beta \in C$ [*detaliind concluzia deducem urmatorul mod de a continua*] <===>

$x = (\alpha,\beta)$, $\alpha \in A$, $\beta \in C$ şi $x = (\alpha,\beta)$, $\alpha \notin B$, $\beta \in C$ ===> $x \in A X C$ şi $x \notin B X C$.

Reciproc, fie $x \in (A X C) - (B X C)$, oarecare <===> $x = (\alpha,\beta)$ cu $(\alpha,\beta) \in A X C$ şi $(\alpha,\beta) \notin B X C$ <===> $x = (\alpha,\beta)$ $\alpha \in A$ şi $\beta \in C$ şi

$$\begin{cases} \alpha \notin B \\ \text{sau} \\ \beta \notin C \end{cases} \quad \text{<===>} \quad \begin{cases} \alpha \in A \ \text{şi} \ \beta \in C \ \text{şi} \ \alpha \notin B \\ \text{sau} \\ \alpha \in A \ \text{şi} \ \beta \in C \ \text{şi} \ \beta \notin C \quad \text{(fals)} \end{cases}$$

===> $(\alpha,\beta) \in (A - B) X C$.

Metoda (B) (utilizarea funcţiei caracteristice)

1. $\varphi_{(A\cap B)x(C\cap D)}(x,y)=\varphi_{A\cap B}(x)\cdot\varphi_{C\cap D}(y)=\varphi_A(x)\cdot\varphi_B(x)\cdot\varphi_C(y)\cdot\varphi_D(y)$

$$\varphi_{(A\times C)\cap(B\times D)}(x,y) = \varphi_{A\times C}(x,y)\cdot\varphi_{B\times D}(x,y) = \varphi_A(x)\cdot\varphi_C(y)\cdot\varphi_B(x)\cdot\varphi_D(y)$$

3. $\varphi_{(A-B)\times C}(x,y) = \varphi_{A-B}(x)\cdot\varphi_C(y) =$

$$= \left(\varphi_A(x) - \varphi_{A\cap B}(x)\right)\varphi_C(y) = \varphi_A(x)\cdot\varphi_C(y) - \varphi_A(x)\cdot\varphi_B(x)\cdot\varphi_C(y).$$

$$\varphi_{(A\times C)-(B\times C)}(x,y) = \varphi_{A\times C}(x,y) - \varphi_{(A\times C)\cap(B\times C)}(x,y) = \varphi_{A\times C}(x,y) -$$

$$- \varphi_{A\times C}(x,y)\cdot\varphi_{B\times C}(x,y) = \varphi_A(x)\cdot\varphi_C(y) - \varphi_A(x)\cdot\varphi_B(x)\cdot\varphi_C^2(y) .$$

4. $\varphi_{A\Delta(B\Delta C)}(x) = \varphi_A(x) + \varphi_{B\Delta C}(x) - 2\varphi_A(x)\cdot\varphi_{B\Delta C}(x) =$

$$\varphi_A(x) + \varphi_B(x) + \varphi_C(x) - 2\varphi_B(x)\cdot\varphi_C(x) - 2\varphi_A(x)\left(\varphi_B(x) + \varphi_C(x) -\right.$$

$$\left.- 2\varphi_B(x)\cdot\varphi_C(x)\right) = \varphi_A(x) + \varphi_B(x) + \varphi_C(x) - 2\cdot\varphi_A(x)\cdot\varphi_B(x) -$$

$$- 2\cdot\varphi_A(x)\cdot\varphi_C(x) - 2\cdot\varphi_B(x)\cdot\varphi_C(x) + 4\cdot\varphi_A(x)\cdot\varphi_B(x)\cdot\varphi_C(x) .$$

Explicitind analog pe $\varphi_{(A\Delta B)\Delta C}(x)$ obținem egalitatea dorită. Dacă obervăm că explicitarea lui $\varphi_{A\Delta(B\Delta C)}(x)$ de mai sus este simetrică,utilizând comutativitatea adunării și înmulțirii egalitatea cerută rezultă mai ușor.

5. $\varphi_{(A\Delta B)\times C}(x,y) = \varphi_{A\Delta B}(x)\cdot\varphi_C(y) = \left(\varphi_A(x) + \varphi_B(x) -\right.$

$$\left.- 2\cdot\varphi_A(x)\beta_B(x)\right)\varphi_C(y) ;$$

$$\varphi_{(A\times C)\Delta(B\times C)}(x,y) = \varphi_{A\times C}(x,y) + \varphi_{B\times C}(x,y) - 2\cdot\varphi_{A\times C}(x,y) .$$

$$\varphi_{B\times C}(x,y) = \varphi_A(x)\cdot\varphi_C(y) + \varphi_B(x)\cdot\varphi_C(y) - 2\cdot\varphi_A(x)\cdot\varphi_B(x)\cdot\varphi_C^2(y).$$

Egalitățile 4)-5) s-au demonstrat ușor utilizînd funcția caracteristică; ele sunt mai greu de demonstrat utilizând prima metodă.In general funcția caracteristică este de preferat, datorită comodității cu care se utilizează și rapidității cu care se obține rezultatul.

III. Demonstrați echivalențele:

1. $A \cup B \subset C \iff A \subset C$ şi $B \subset C$

2. $A \subset B \cap C \iff A \subset B$ şi $B \subset C$

3. $A \cap B \subset C \iff A \cap C_B \cup C$

4. $A \subset B \cup C \iff A \cap C_B \subset C$

5. $(A - B) \cup B \iff B \cup A$

REZOLVARI:

1. r_1: avem de arătat o echivalenţă

R_1: arătăm două implicaţii

r_2: $A \cup B \subset C \Rightarrow A \subset C$ şi $B \subset C$

R_2: arătăm că $A \subset C$ şi $B \subset C$ (două incluziuni)

Fie $x \in A$ oarecare [nu mai avem operaţii deexplicitat, de aceea actualizăm concluzia: $x \in C$; dar acest lucru nu rezultă imediat din $x \in A$, ci doar cu ajutorul ipotezei]

$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow$ [prin ipoteză $A \cup B \subset C$] $\Rightarrow x \in C$

Fie acum $x \in B$ oarecare $\Rightarrow x \in A \cup B \subset C \Rightarrow x \in C$

Reciproc (a doua implicaţie):

r_1: avem dearătat că $A \cup B \subset C$ (o incluziune)

R_1: fie $x \in A \cup B$ oarecare (explicităm ultima operaţie):

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in A \Rightarrow x \in C & \text{(datorită ipotezei)} \\ \text{sau} & \\ x \in B \Rightarrow x \in C & \text{(datorită ipotezei)} \end{cases}$$

5. r_1: avem de arătat o echivalenţă

R_1: arătăm două implicaţii

r_2: $(A - B) \cup B = A \Rightarrow B \subset A$

R_2: arătăm concluzia (o incluziune), utilizînd ipoteza.

Fie $x \in B$ oarecare $\Rightarrow x \in (A - B) \cup B \Rightarrow x \in A$

r_3: avem de arătat implicaţia: $B \subset A \Rightarrow (A - B) \cup B = A$

R_3: arătăm o egalitate de mulţimi (două incluziuni)

Pentru prima incluziune fie $x \in (A - B) \cup B$ oarecare [explicităm ultima operaţie] $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in A - B \\ \text{sau} \\ x \in B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \quad \text{şi} \quad x \notin B & \text{(a)} \\ \text{sau} \\ x \in B & \text{(b)} \end{cases}$$

[nu mai avem operaţii de explicitat, de aceea actualizăm concluzia].Astfel, observăm că din (a) rezultă $x \in A$, iar din (b), cu ajutorul ipotezei, $B \subset A$, se obţine de asemenea $x \in A$.

Metoda 2:

1. $\left(A \cup B \subset C \Rightarrow A \subset C \text{ şi } B \subset C \right) \Leftrightarrow \left(\varphi_{A\cup B} \leq \varphi_C \Rightarrow \right.$ $\left. \Rightarrow \varphi_A \leq \varphi_C \text{ şi } \varphi_B \leq \varphi_C \right)$

Avem de arătat două inegalităţi între funcţii. Prin ipoteză, $\varphi_{A\cup B} \leq \varphi_C$ şi în plus $\varphi_A \leq \varphi_{A\cup B}$ (într-adevăr, $\varphi_A \leq \varphi_{A\cup B} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \varphi_A \leq \varphi_A + \varphi_B - \varphi_A \varphi_B \Leftrightarrow \varphi_B(1 - \varphi_A) \geq 0$ – adevărat deoarece funcţiile caracteristice iau doar două valori: 0 şi 1).

Rezultă $\varphi_A \leq \varphi_{A\cup B} \leq \varphi_C$ şi analog $\varphi_B \leq \varphi_{A\cup B} \leq \varphi_C$.

Reciproc, pentru implicaţia inversă, trebuie arătat că: $\varphi_{A\cup B} \leq \varphi_C$, adică

$$\varphi_A(x) + \varphi_B(x) - \varphi_{A\cap B}(x) \leq \varphi_C(x) \tag{1.7}$$

în ipoteza:

$$\varphi_A \leq \varphi_C \quad \text{şi} \quad \varphi_B \leq \varphi_C \tag{1.8}$$

Dar φ_A, φ_B, φ_C pot lua doar două valori: 0 şi 1. Din cele opt cazuri posibile în care trebuie verificată (1.7), datorită lui (1.8) mai rămîn următoarele patru:

a) $\varphi_A(x) = \varphi_B(x) = \varphi_C(x) = 1$

b) $\varphi_A(x) = \varphi_C(x) = 1$, $\varphi_B(x) = 0$

c) $\varphi_B(x) = \varphi_C(x) = 1$, $\varphi_A(x) = 0$

d) $\varphi_A(x) = \varphi_B(x) = \varphi_C(x) = 0$

În fiecare din aceste cazuri (1.7) este îndeplinită.

5. Avem de arătat că

$\varphi_{(A-B)\cup B}(x) = \varphi_A(x) \iff \varphi_B(x) \leq \varphi_A(x)$

Dar $\varphi_{(A-B)\cup B}(x) = \varphi_{A-B}(x) + \varphi_B(x) - \varphi_{(A-B)\cap B}(x) = \varphi_A(x) -$

$- \varphi_{A\cap B}(x) + \varphi_B(x) - \varphi_{A-B}(x)\cdot\varphi_B(x) = \varphi_A(x) - \varphi_A(x)\cdot\varphi_B(x) + \varphi_B(x) -$

$$- \left(\varphi_A(x) - \varphi_A(x)\cdot\varphi_B(x) \right)\cdot\varphi_B(x) = \varphi_A(x) + \varphi_B(x) - \varphi_A(x)\cdot\varphi_B(x). \quad (1.9)$$

Pentru implicația directă, prin ipoteză, avem:

$\varphi_A(x) + \varphi_B(x) - \varphi_A(x)\cdot\varphi_B(x) = \varphi_A(x)$, adică:

$\varphi_B(x)\left(1 - \varphi_A(x) \right) = 0$. Prin urmare:

$$\begin{cases} \varphi_B(x) = 0 \Rightarrow \varphi_B(x) \leq \varphi_A(x) & \text{(datorită valorilor 0 și 1 pe care le ia funcția } \varphi \text{)} \\ \quad \text{sau} & \\ 1 - \varphi_A(x) = 0 \Rightarrow \varphi_A(x) = 1 & \text{deci } \varphi_B(x) \leq \varphi_A(x) \end{cases}$$

Reciproc, dacă $\varphi_B(x) \leq \varphi_A(x)$, nu putem avea $\varphi_B(x) = 1$ și $\varphi_A(x) = 0$, iar din (1.9) deducem :

$$\varphi_{(A-B)\cup B}(x) = \varphi_A(x) \iff \varphi_A(x) + \varphi_B(x) - \varphi_A(x)\cdot\varphi_B(x) = \varphi_A(x)$$

$\iff \varphi_B(x)\left(1 - \varphi_A(x) \right) = 0$ – egalitate adevărată în cele trei cazuri posibile rămase: a) $\varphi_A(x) = 1$, $\varphi_B(x) = 0$

b) $\varphi_A(x) = \varphi_B(x) = 1$

c) $\varphi_A(x) = \varphi_B(x) = 0$

IV. Utilizînd proprietățile funcției caracteristice, să se rezolve următoarele ecuații și sisteme de ecuații cu mulțimi:

1. $A \cup (B - X) = B \cup X$

2. $\begin{cases} A - X = B \\ A \cup X = C \end{cases}$ dacă $B \subset A$ și $A \cap C = \emptyset$

3. $\begin{cases} A \cap X = B \\ A \cup X = C \end{cases}$ dacă $B \subset A \subset C$

4. $\begin{cases} X \cup Y = A \\ X \cap Y = B \\ X - Y = C \end{cases}$ dacă $B \subset A$, $C \subset A$, $B \cap C = \emptyset$

Rezolvare:

1. $A \cup (B - X) = B \cup X \iff \varphi_{A\cup(B-X)}(x) = \varphi_{B\cup X}(x) \iff$

$\varphi_A(x) + \varphi_{B-X}(x) - \varphi_A(x)\cdot\varphi_{B-X}(x) = \varphi_B(x) + \varphi_X(x) - \varphi_B(x)\cdot\varphi_X(x) \iff$

$\iff \varphi_A(x) + \varphi_B(x) - \varphi_B(x)\cdot\varphi_X(x) - \varphi_A(x)\cdot\varphi_B(x) +$

$\varphi_A(x)\cdot\varphi_B(x)\cdot\varphi_X(x) = \varphi_B(x) + \varphi_X(x) - \varphi_B(x)\cdot\varphi_X(x) \iff$

$\iff \varphi_X(x)\big(1 - \varphi_A(x)\cdot\varphi_B(x) \big) = \varphi_A(x)\big(1 - \varphi_B(x) \big) \iff$

$$\iff \varphi_X(x)\cdot\varphi_{C(A\cap B)}(x) = \varphi_{A\cap C_B}(x) \qquad (1.10)$$

Avem de anlizat următoarele cazuri:

a) dacă $x \notin A$ şi $x \notin B$ avem:

$\varphi_{C(A\cap B)}(x) = 1$ şi $\varphi_{A\cap C_B}(x) = 0$ deci pentru a fi îndeplinit (1.10) trebuie să avem $\varphi_X(x) = 0$. Aşadar orice punct care nu aparţine lui A şi nici lui B, nu aparţine nici lui X.

b) dacă $x \in A$ şi $x \notin B$, avem:

$\varphi_{C(A\cap B)}(x) = 1$ şi $\varphi_{A\cap C_B}(x) = 1$ deci pentru a fi îndeplinit (1.10) trebuie să avem $\varphi_X(x) = 1$. Aşadar, orice punct din $A - B$ este în X .

c) dacă $x \notin A$ şi $x \in B$ pentru a fi îndeplinită (1.10) trebuie să avem $\varphi_X(x) = 0$, deci nici un punct din $B - A$ nu este în X .

d) dacă $x \in A$ şi $x \in B$ putem avea $\varphi_X(x) = 0$ sau $\varphi_X(x) = 1$

Deci orice punct din $A \cap B$ poate să fie în X sau să nu fie. Aşadar X este de forma $X = (A \setminus B) \cup D$ unde

$D \subset A \cap B$ arbitrar.

2. $A - X = B \iff \varphi_{A-B}(x) = \varphi_B(x) \iff \varphi_A(x) - \varphi_A(x)\cdot\varphi_X(x) =$

$= \varphi_B(x) \iff \varphi_X(x)\cdot\varphi_A(x) = \varphi_A(x) - \varphi_B(x)$ (1.11)

$X - A = C \iff \varphi_X(x) - \varphi_X(x)\cdot\varphi_A(x) = \varphi_C(x) \iff$

$\iff \varphi_X(x)\left(1 - \varphi_A(x)\right) = \varphi_C(x) \iff$

$\iff \varphi_X(x)\cdot\varphi_{CA}(x) = \varphi_C(x)$ (1.12)

Avem de analizat patru cazuri, după cum se vede din tabelul următor:

Cazuri	$\varphi_A(x)$	$\varphi_B(x)$	$\varphi_C(x)$	$\varphi_X(x)$	(1.11)	(1.12)
$x \notin A$ şi $x \notin C$	0	0	0	0	$0\cdot0=0-0$ (A)	$0\cdot1=0$ (A)
				1	$1\cdot0=0-0$ (A)	$1\cdot1=0$ (F)
$x \in A$ şi $x \notin B$	1	0	0	0	$0\cdot1=1-0$ (F)	$0\cdot0=0$ (A)
				1	$1\cdot1=1-0$ (A)	$1\cdot0=0$ (A)
$x \in B$	1	1	0	0	$0\cdot1=1-1$ (A)	$0\cdot0=0$ (A)
				1	$1\cdot1=1-1$ (F)	$1\cdot0=0$ (A)
$x \in C$	0	0	1	0	$0\cdot0=0-0$ (A)	$0\cdot1=1$ (F)
				1	$1\cdot0=0-0$ (A)	$1\cdot1=1$ (A)

Deci $X = (A - B) \cup C$.

V. Să se determine mulţimile:

1. $A = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x = \dfrac{6n - 7}{2n + 1},\ n \in \mathbb{Z} \}$

2. $A = \{ x \in \mathbb{N} \mid x = \dfrac{3n^2 - 2n + 1}{n^2 - 1},\ n \in \mathbb{N} \}$

3. $A = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x = \dfrac{6n^2+7}{3n+1}, \ n \in \mathbb{Z} \}$

4. $A = \{ x \in \mathbb{Z} \mid \dfrac{x^3-3x+2}{2x+1} \in \mathbb{Z} \}$

5. $A = \{ (x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 9y^2-(x+1)^2 = 32 \}$

6. $A = \{ (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x^2-2xy+3y^2 = 8 \}$

7. Fie $P \in \mathbb{Z}(x)$ un polinom de grad n şi $q \in \mathbb{Z}$. Ştiind că $P(q) = 15$, să se determine mulţimea:

$$A = \{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{P(x)}{x-q} \in \mathbb{Z} \}$$

8. $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid \exists\, a \in \mathbb{R}, \ x = \dfrac{a^2-a+1}{a+1} \}$.

Indicatii:

1. Se pune in evidenţă o parte intreagă maximală.Acest lucru se obţine făcând impărţirile:

$$x = 3 - \frac{10}{2n+1}, \quad \text{deci} \quad x \in \mathbb{Z} \iff \frac{10}{2n+1} \in \mathbb{Z} \iff$$

10 este divizibilcu $2n+1 \iff n \in \{0, 1, -2\}$

4. $E = \dfrac{x^2-3x+2}{2x+1} = \dfrac{1}{5}\left(4x^2-2x-11+\dfrac{27}{2x+1} \right)$,

deci $E \in \mathbb{Z} \iff$ 27 este divizibil cu $2x+1$ şi $4x^2-2x-11+\dfrac{27}{2x+1}$ este multiplu de 8 $\iff A \in \{ -14, -5, -2, -1, 0, 1, 4, 13 \}$.

5. $9y^2-(x+1)^2 = 32 \iff (3y-x-1)(3y+x+1) = 32$

deci x şi y sint solţii intregi ale unor sisteme de forma:

$$\begin{cases} 3y - x - 1 = u \\ 3y + x + 1 = v \end{cases} \quad \text{cu u şi v divizori ai lui 32.}$$

6. $x^2 - 2x + 3y^2 = 8 \iff (x - y)^2 + 2y^2 = 8 \Rightarrow$

$x - y = 0$ şi $2y^2 = 8$.

7. $P(x) = C(x)(x - q) + R \iff a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 =$

$= C(x)(x - q) + 15$. Deci $\dfrac{P(x)}{x - q} \in \mathbb{Z} \iff 15$ este divizibil cu $x - q$.

8. *Metoda 1:* Pentru $a \neq -1$ avem $x = \dfrac{a^2 - a + 1}{a + 1} \iff$

$\iff ax + x = a^2 - a + 1 \iff a^2 - a(1 + x) + 1 - x = 0 \iff$

$\iff a = \dfrac{1 + x \pm \sqrt{x^2 + 6x - 3}}{2}$ deci trebuie să avem

$x^2 + 6x - 3 \geq 0$. Cum $x_{1,2} = -3 \pm 2\sqrt{3}$, deducem:

$x \in (-\infty , -3 - 2\sqrt{3}\,] \cup [\,-3 + 2\sqrt{3} , +\infty)$.

Metoda 2: Considerăm funcţia $f(a) = \dfrac{a^2 - a + 1}{a + 1}$ şi $A = f(D)$, cu $D = \mathbb{R} \setminus \{ -1 \}$ domeniul lui f. A se obţine din tabelul de variaţie al lui f.

VI. Să se determine mulţimile următoare, cînd $a,b \in \mathbb{N}$:

1. $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \left[\dfrac{a + x}{b}\right] = \left[\dfrac{a}{b}\right] \right\}$

2. $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \left[\dfrac{a + x}{b}\right] = \left[\dfrac{a}{b}\right] + 1 \right\}$

3. $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \left[2^x \right] = 2^{[x]} \right\}$

unde [t] este partea întreagă a lui t.

Rezolvari: Folosim inegalităţile: $[t] \leq t < [t] + 1$, deci:

1. $$\left[\frac{a + x}{b}\right] \leq \frac{a + x}{b} < \left[\frac{a + x}{b}\right] + 1$$

$x \in A \iff \left[\dfrac{a}{b}\right] \leq \dfrac{a + x}{b} < \left[\dfrac{a}{b}\right] + 1 \iff$

$\iff b\left[\dfrac{a}{b}\right] - a \leq x < b\left[\dfrac{a}{b}\right] + b - a$

2. $x \in A \iff \left[\frac{a}{b}\right] + 1 \leq \frac{a+x}{b} < \left[\frac{a}{b}\right] + 2 \iff$

$\iff b\left[\frac{a}{b}\right] + b - a \leq x < b\left[\frac{a}{b}\right] + 2b - a$.

VII. Aplicaţia $f:\mathcal{P}(T) \longrightarrow \mathcal{F}_T$ definită prin $f(A) = \varphi_A$ este o bijecţie de la familia părţilor lui T la familia funcţiilor caracteristice definite pe T.

Rezolvare: Pentru demonstrarea injectivităţii, fie $A, B \in \mathcal{P}(T)$ cu $A \neq B$. Din $A \neq B$ deducem că există $x_o \in T$ astfel încât:

a) $x_o \in A$ şi $x_o \notin B$ sau b) $x_o \in B$ şi $x_o \notin A$

În primul caz $\varphi_A(x_o) = 1$, $\varphi_B(x_o) = 0$, deci $\varphi_A \neq \varphi_B$. În al doilea caz, de asemenea, $\varphi_A \neq \varphi_B$.

Surjectivitatea revine la:

$$\forall \varphi \in \mathcal{F}_T \quad \exists A \in \mathcal{P}(T) \quad \text{a.i.} \quad \varphi = \varphi_A$$

Fie deci $\varphi \in \mathcal{F}_T$ oarecare. Atunci pentru $A = \{ x \mid \varphi(x) = 1 \}$ avem $\varphi = \varphi_A$.

2. F U N C T I I

DEFINITIA FUNCTIEI

O funcţie este determinată de trei elemente D , E şi f , având următoarele semnificatii: D şi E sunt mulţimi, numite respectiv domeniul si codomeniul funcţiei, iar f este o lege de corespondenţă de la D la E care face ca:

fiecarui element x ∈ D sa-i corespunda un element si numai unul y ∈ E. (F)

Deci se poate spune că o funcţie este un triplet (D,E,f), elementele acestui triplet având semnificatile de mai sus.

Acest triplet se notează în mod frecvent prin $f : D \longrightarrow E$.
Două funcţii sunt deci egale dacă sunt egale ca triplete,adică atunci când au cele trei elemente constitutive respectiv egale(şi nu doar legile de corespondenţă).

Pentru a sublinia importanţa pe care o au domeniul si codome-

niul în definiţia funcţiei vom da în cele ce urmează exemple în care păstrând legea de corespondenţă f neschimbată şi modificând doar domeniul sau (şi) codomeniul, putem întâlni toate situaţiile posibile, de la aceea în care tripletul nu este funcţie până la o functie bijectivă.

Pentru aceasta este nevoie să detaliem mai întâi condiţia (F), ce caracterizează o funcţie.

Putem considera că această condiţie este formată din două subcondiţii, şi anume:

(f_1) *fiecarui element x din domeniu îi corespunde un element, în sensul de "cel puţin un element", în codomeniu.*

Cu ajutorul unor diagrame de felul celor de mai jos, aceasta condiţie se poate exprima prin propoziţia

"Din fiecare punct al domeniului pleacă (cel puţin) o sageată."

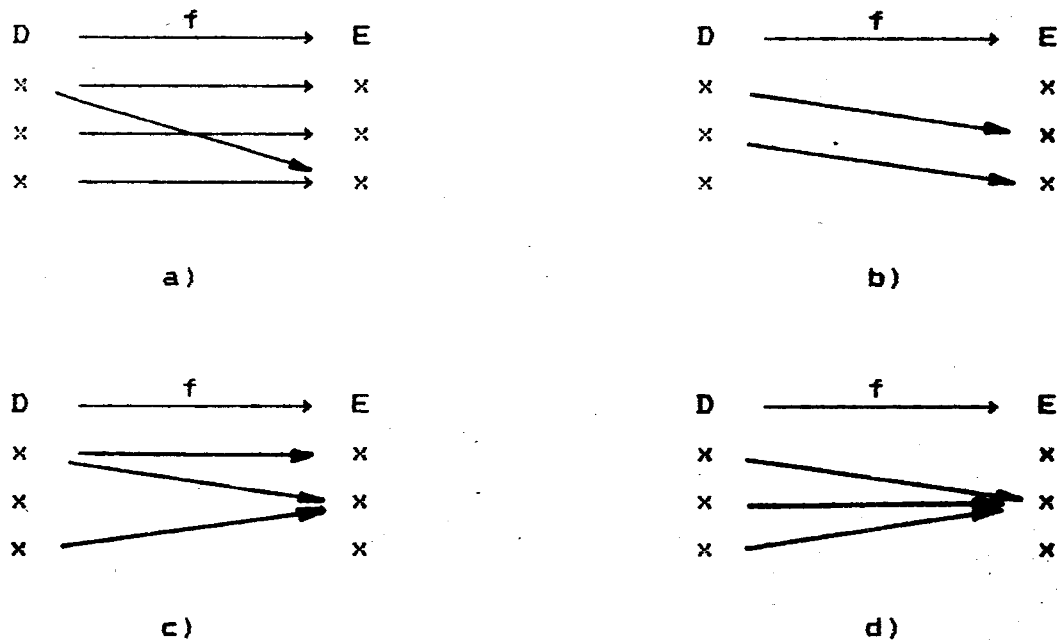


Fig. 2.1

iar mai riguros condiţia se exprimă prin

$$(f_1) \qquad \forall\, x \in D \;\; \exists\, y \in E \,,\; y = f(x)$$

A doua subcondiţie referitoare la f în definiţia funcţiei este:

(f_2) *elementul din codomeniu ce corespunde unui x este unic.*

Pentru o diagramă de felul celor din fig.2.1 înseamnă că <u>săgeata care pleacă dintr-un punct este unică.</u>

Această condiţie are formularea echivalentă:

" *Daca doua sageti au acelasi punct de plecare atunci ele au si acelasi punct de sosire.*"

adică

$$(f_2) \qquad \forall\, x_1 = x_2 \implies f(x_1) = f(x_2)$$

Condiţiile (f_1) şi (f_2) sunt necesare şi suficiente pentru ca o lege de corespondenţă f să fie funcţie. Aceste condiţii sunt uşor de utilizat în practică.

În figura 2.1, legea de corespondenţă de la a) satisface (f_1) şi nu satisface (f_2); la b) legea de corespondenţă nu satisface (f_1), dar satisface (f_2). În diagrama c) nu este satisfăcută nici (f_1) nici (f_2), iar în d) legea de corespondenţă satisface şi (f_1) şi (f_2), deci este (singura) funcţie.

O functie este deci un triplet (D, E, f) in care legea de corespondenta f satisface (f_1) si (f_2).

Să observăm că aceste două condiţii se referă doar la domeniul funcţiei:

(f_1)- din fiecare punct al domeniului pleacă cel puţin o săgeată;

(f_2)- săgeata care pleacă dintr-un punct al domeniului este unică.

Se ştie că graficul unei funcţii este format din mulţimea perechilor de puncte $(x,f(x))$, cînd x parcurge domeniul funcţiei.

$$G_f = \{ \left(x,f(x) \right) \mid x \in D \}$$

CUM RECUNOAŞTEM PE UN GRAFIC DACA O LEGE DE CORESPONDENŢA ESTE FUNCŢIE ? (deci dacă satisface (f_1) şi (f_2))

Pentru a răspunde la această întrebare vom aminti mai intîi (pentru cazul D , E $\subset$ R) răspunsul la alte două întrebări:

1. Fiind dat x, cum obţinem - cu ajutorul graficului - pe f(x) ?
   (adică *imaginea* lui x (sau *imaginile*, dacă sunt mai multe, şi desigur în acest caz legea de corespondenţă f nu este funcţie)).

Raspuns : Ducem din x o paralelă la Oy până când aceasta întâlneşte graficul, iar din punctul (punctele) de intersecţie cu graficul ducem apoi paralelă (paralele) la Ox. Punctele de intersecţie ale acestor paralele cu Oy sunt imaginile f(x) ale lui x.

2. Reciproc, fiind dat y , pentru a obţine punctul (punctele) x avînd proprietatea f(x) = y , ducem prin y o paralelă la Ox, iar din punctul (punctele) de intersecţie cu graficul ducem apoi o paralelă (paralele) la Oy.

EXEMPLE:

1. Un cerc cu centrul în origine şi de rază r nu este graficul unei functii f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, deoarece nu satisface nici condiţia (f_1) (*exista puncte in domeniu care nu au nici o imagine*, şi anume toate punctele prin care paralela la Oy nu întâlneşte graficul) şi nu este satisfăcută nici condiţia (f_2), pentru că *exista*

puncte în domeniu care au mai mult de o imagine (toate punctele $x \in (-r,r)$ au două imagini)

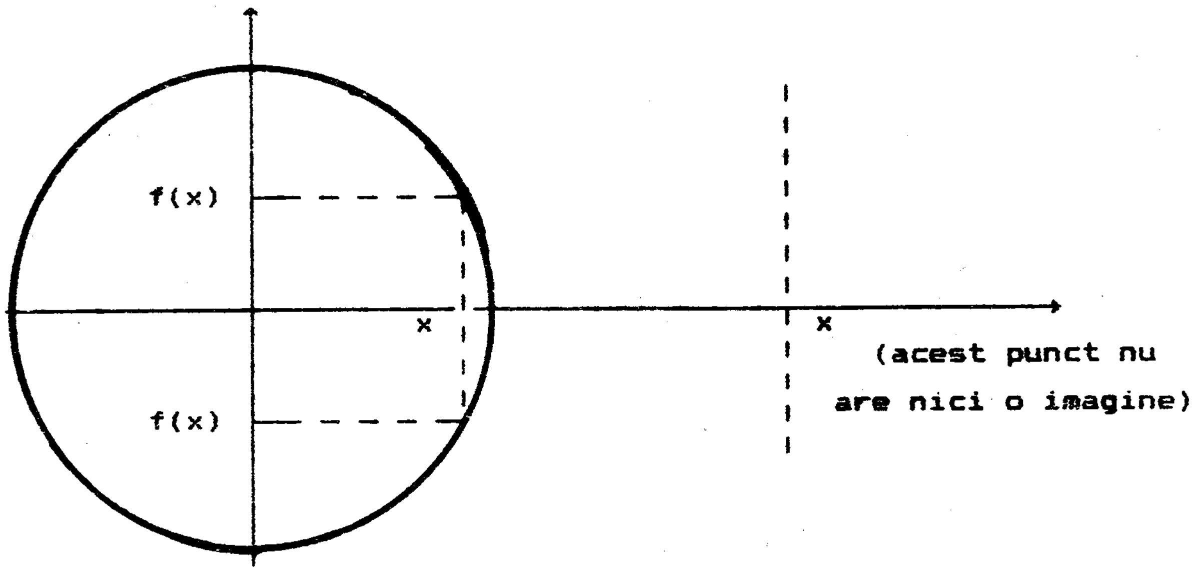


Fig. 2.2

2. Un cerc cu centrul în origine şi de rază r nu este graficul unei funcţii $f : [-r , r] \longrightarrow \mathbb{R}$,deoarece nu satisface condiţia (f_2) (de data aceasta nu mai există în domeniu puncte fără nici o imagine, dar continuă să existe *puncte care au doua imagini*).

3. Un cerc cu centrul în origine şi de rază r nu este graficul unei funcţii $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0 , \infty)$, deoarece nu satisface condiţia (f_1). Codomeniul fiind $[0 , \infty)$ punctele au *cel mult o imagine*. Sunt însă şi *puncte care nu au nici o imagine*.

4. Un cerc cu centrul în origine şi de rază r este graficul unei funcţii $f :[-r ,r] \longrightarrow [0 ,1]$, deoarece *toate punctele din domeniu au o imagine si numai una*.

5. Un cerc cu centrul în origine şi de rază r este graficul unei functii f : $[0, r] \longrightarrow [-1, 0]$.

În toate aceste exemple legea de corespondenţă a rămas neschimbată (un cerc cu centrul în origine şi de rază r, având deci ecuaţia $x^2 + y^2 = r^2$, de unde obţinem $y = \pm (r^2 - x^2)^{1/2}$).

Modificând doar domeniul şi (sau) codomeniul am pus în evidenţă toate situaţiile posibile, începând de la a nu fi îndeplinită nici una din condiţiile ce definesc o funcţie, până la a fi îndeplinite ambele condiţii.

CU AJUTORUL PARALELELOR LA AXELE DE COORDONATE RECUNOASTEM INDEPLINIREA CONDITIILOR (f_1) SI (f_2) ASTFEL:

a) *Un grafic satisface conditia (f_1) daca si numai daca orice paralela la Oy dusa prin punctele domeniului intilneste graficul in cel putin un punct.*

b) *Un grafic satisface conditia (f_2) daca si numai daca orice paralela la Oy dusa prin punctele domeniului intilneste graficul in cel mult un punct.*

I N V E R S A   U N E I   F U N C T I I

Inversând legea de corespondenţă (inversând sensul săgeţilor) pentru o funcţie oarecare $f : D \longrightarrow E$ nu se obţine totdeauna o funcţie. Astfel, în figura 2.3 f este funcţie, dar f^{-1}

(obținută prin inversarea legii de corespondență f) nu mai este funcție, deoarece nu satisface (f_2) (există puncte cu mai mult de o imagine).

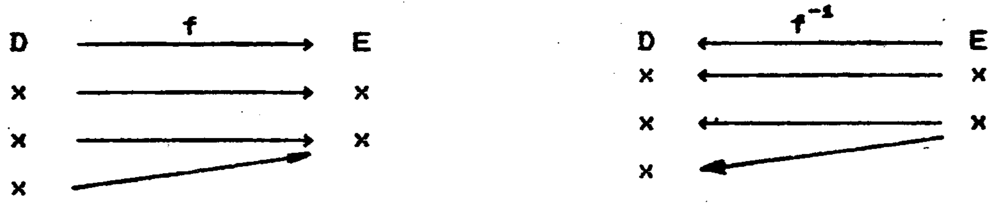


Fig. 2.3

Cu ajutorul acestor diagrame observăm că inversa nu satisface (f_2) ori de câte ori există puncte în codomeniul lui f care sunt imaginea a cel puțin două puncte din domeniul lui f .

Altfel spus, f^{-1} *nu satisface* (f_2) *oridecate ori exista puncte diferite care au aceeasi imagine prin* f. Deci:

Pentru ca inversând legea de corespondență să fie satisfăcută condiția (f_2) este necesar și suficient ca prin funcția directă puncte diferite să aibă imagini diferite, adică

$$(f_3) \quad \forall\, x_1,x_2 \in D\ ,\quad x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

O a doua situație în care f^{-1} nu este funcție este atunci când ea nu satisface condiția (f_1) :

Fig 2.4

Observăm că aceasta se întîmplă ori de câte ori prin funcţia directă există puncte în codomeniu care nu sunt imaginile niciunui punct din domeniu.

Pentru ca inversând legea de corespondenţă a unei funcţii să fie satisfăcută condiţia (f_1) este necesar şi suficient ca *prin functia directa sa se consume toate punctele din codomeniu*, adică

$$(f_4) \quad \forall\, y \in B \quad \exists\, x \in D \;, f(x) = y$$

În concluzie,

f^{-1} satisface (f_2) dacă şi numai dacă f satisface (f_3)

f^{-1} satisface (f_1) dacă şi numai dacă f satisface (f_4)

f^{-1} este funcţie dacă şi numai dacă f satisface $(f_3) + (f_4)$

După cum se ştie, o funcţie care satisface (f_3) se numeşte funcţie injectivă, o funcţie care satisface (f_4) se numeşte funcţie surjectivă, iar o funcţie care satisface $(f_3) + (f_4)$ se numeşte funcţie bijectivă.

Vedem deci că afirmaţia:

"O funcţie are inversă dacă şi numai dacă este bijectivă."

are înţelesul că inversa f^{-1} (care există totdeauna, ca lege de corespondenţă, chiar dacă f nu este bijectivă) este funcţie dacă şi numai dacă f este bijectivă.

Cu ajutorul paralelelor la axele de coordonate recunoaştem dacă un grafic este graficul unei funcţii injective sau surjective; astfel:

(c) un grafic este graficul unei functii injective daca si numai daca orice paralela la Ox dusa prin punctele co-

domeniului intilneşte graficul in cel mult un punct (adica f^{-1} satisface (f_2)).

(d) Un grafic este graficul unei functii surjective daca si numai daca orice paralela la Ox dusa prin punctele codomeniului intilneste graficul in cel putin un punct (adica f^{-1} satisface (f_1)).

EXEMPLE:

1. Un cerc cu centrul în origine şi de rază r este graficul unei funcţii $f : [0 , r] \longrightarrow [0 , \infty)$ care <u>este injectivă</u> dar <u>nu surjectivă.</u>

2. Un cerc cu centrul în origine şi de rază r este graficul unei funcţii $f : [-r , r] \longrightarrow [0 , r]$, care <u>este surjectivă</u> dar <u>nu injectivă.</u>

3. Un cerc cu centrul în origine şi de rază r este graficul unei funcţii <u>bijective</u> $f : [0 , r] \longrightarrow [0 , r]$.

Deci modificând doar domeniul şi codomeniul, cu ajutorul unui cerc cu centrul în origine şi de rază r se pot obţine toate situaţiile, începând de la a nu fi satisfăcută niciuna din cele două condiţii ce definesc o funcţie, până la o funcţie bijectivă.

OBSERVATIE:

f^{-1} se obţine prin inversarea legii de corespondenţă f, adică

$$x \xrightarrow{f} y \quad \Longleftrightarrow \quad x \xleftarrow{f^{-1}} y$$

cu alte cuvinte

$$y = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x = f^{-1}(y) \qquad (2.1)$$

În cazul funcţiei exponenţiale de exemplu, echivalenţa (2.1)

devine:

$$y = a^x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \log_a y \qquad (2.2)$$

deoarece inversa funcţiei exponenţiale se notează prin $f^{-1}(y) = \log_a y$. Relaţia (2.2) defineşte logaritmul:

Logaritmul unui număr y într-o bază dată, a , este exponentul x la care trebuie ridicată baza pentru a obţine pe y.

G R A F I C U L   F U N C T I E I   I N V E R S E

Dacă D şi E sunt submulţimi ale lui R şi se figurează pe axa Ox domeniul D al lui f (deci codomeniul lui f^{-1}) , iar pe axa Oy codomeniul E (deci domeniul lui f^{-1}) atunci graficul lui f şi f^{-1} coincid, deoarece f^{-1} nu face decît să inverseze legea de corespondenţă (inversează sensul săgeţilor).

Dar dacă figurăm şi pentru f^{-1} domeniul pe orizontală, iar codomeniul pe verticală, deci figurăm E pe Ox iar D pe Oy, atunci un punct oarecare de pe graficul iniţial G_f (care, fără convenţia amintită este grafic atât pentru f cât şi pentru f^{-1}) un astfel de punct (x,f(x)) devine (f(x),x).

Punctele (x,f(x)) şi (f(x),x) sunt simetrice faţă de prima bisectoare, deci pe lângă G_f mai obţinem un grafic G_f^s , dacă şi domeniul lui f^{-1} este pe Ox.

Convenind să figurăm domeniile tuturor funcţiilor pe Ox rezultă că G_f^s este grafic al lui f^{-1}.

Cu această convenţie graficele lui f şi f^{-1} sunt simetrice faţă de prima bisectoare.

METODE PENTRU A ARATA CA O FUNCTIE ESTE BIJECTIVA

1. Utilizarea definiției.

- pentru studiul injectivității verificăm dacă funcția satisface condiția (f_3).
- pentru studiul surjectivității verificăm dacă este îndeplinită condiția (f_4).

2. Metoda grafica.

- pentru studiul injectivității utilizăm propoziția *c)*
- pentru studiul surjectivității utilizăm propoziția *d)*

<u>Observație importantă:</u> Dacă utilizăm metoda grafică este esențial, pentru funcții definite pe ramuri, să trasăm cât mai exact graficul în jurul punctului (punctelor) de legătură dintre ramuri.

<u>Exemple:</u>

1. Funcția $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{dacă } x \le 1 \\ x + 3 & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$

este injectivă, dar nu este surjectivă. Graficul este în figura 2.5 a).

2. Funcția $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{dacă } x \le 2 \\ 2x - 1 & \text{dacă } x > 2 \end{cases}$

este surjectivă, dar nu este injectivă. Graficul este în figura 2.5 b).

3. Funcţia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{dacă } x \leq 1 \\ x + 2 & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$

este bijectivă. Graficul este în fig. 2.5 c).

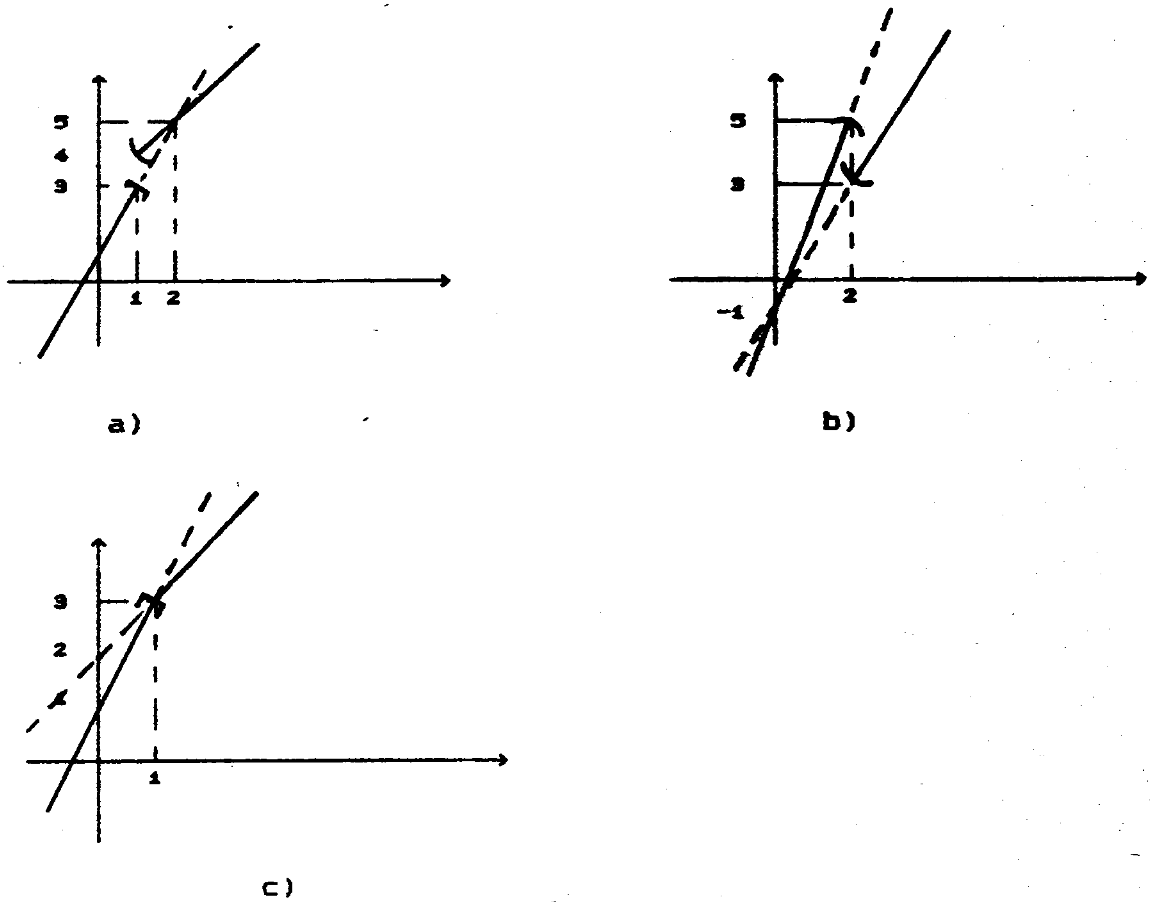


Fig. 2.5

3. Utilizarea teoremei : O funcţie strict monotonă este injectivă.

Pentru studiul surjectivităţii verificăm dacă funcţia este continuă şi în caz afirmativ calculăm limitele la extremităţile domeniului.

Exemplu: Să arătăm că $f(x) = \operatorname{tg} x$, $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ este bijectivă.

(i) injectivitatea: deoarece $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ este strict pozitivă, deducem că funcţia este strict crescătoare, deci este injectivă.

(ii) surjectivitatea: funcţia este continuă pe tot domeniul de definiţie, deci are proprietatea lui Darboux şi

$$\lim_{\substack{x \to -\pi/2 \\ x > -\pi/2}} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{\substack{x \to \pi/2 \\ x < \pi/2}} f(x) = \infty$$

de unde rezultă că este surjectivă.

4. *Utilizarea propoziţiei* : Funcţia $f : D \longrightarrow E$ este bijectivă dacă şi numai dacă

$\forall\, y \in E$ ecuaţia $f(x) = y$ <u>are o soluţie unică</u>

(vezi manualul de algebră cls. XII)

Exemplu. Fie $D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ şi matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Atunci funcţia $f^*_A : D \longrightarrow D$, $f^*_A(x_1, x_2) = (3x_1 - x_2\, ,\, 4x_1 + 2x_2)$ este bijectivă (algebră cls. XII).

Să observăm că în propoziţia utilizată la acest punct, afirmaţia "ecuaţia $f(x) = y$ are soluţie " asigură surjectivitatea funcţiei iar afirmaţia "soluţia este unică" asigură injectivitatea.

5. *Utilizarea propoziţiei* : Dacă $f, g : D \longrightarrow D$ şi $g \circ f = 1_D$ atunci f este injectivă şi g este surjectivă. (algebră clasa XII).

EXEMPLU. Fie $D = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ şi $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$. Atunci funcţia $f_A : D \longrightarrow D$ definită prin

$f_A(x_1,x_2) = (2x_1 + 3x_2 , -x_1 - 2x_2)$ satisface $f_A \circ f_A = 1_D$, deci

este bijectivă. (algebră,cls. XII)

Să observăm că propoziţia utilizată la acest punct poate fi generalizată astfel :

"Fie $f : D \longrightarrow E$, $g : E \longrightarrow F$ astfel încât $g \circ f$ este bijectivă. Atunci f este injectivă şi g este surjectivă."

EXERCITII.

I. Să se traseze graficele următoarelor funcţii şi să se specifice în fiecare caz în parte dacă funcţia respectivă este injectivă, surjectivă sau bijectivă.

1. $f(x) = \min (x + 1 , x^2 + 2 , 3x)$
2. $f(x) = \max (3x - 1 , 2x + 3 , x^2 - 2x)$
3. $f(x) = \min (2x - 3, 4x^2 - 5 , [x])$
4. $f(x) = \min (|x - 3| , 4x)$
5. $f(x) = \min\limits_{-1 \le t \le x} t^2$
6. $f(x) = \inf\limits_{t < x} (t^2 + 2t + 3)$
7. $f(x) = \inf\limits_{t<x} \dfrac{(t + 1)^2}{t^2 + 1}$
8. $f(x) = \min\limits_{-2 \le t \le x} (t^2 - |t - 2|)$
9. $f(x) = \min\limits_{-2 < t < x} \dfrac{t^4}{(t + 7)^3}$

10. $f(x) = \sup\limits_{0<t<x} t^2 \ln t$

11. $f(x) = \max\limits_{-3\leq t\leq x} (t - 2 \operatorname{arctg} t)$

12. $f(x) = \max\limits_{-\pi/4\leq t\leq x} \sin t$.

REZOLVARI.

Se ştie că:

$$\min(u(x),v(x),w(x)) = \begin{cases} u(x) \text{ dacă } u(x) \leq v(x) \text{ şi } u(x) \leq w(x) \\ v(x) \text{ dacă } v(x) \leq u(x) \text{ şi } v(x) \leq w(x) \\ w(x) \text{ dacă } w(x) \leq u(x) \text{ şi } w(x) \leq v(x) \end{cases}$$

Pentru a explicita mai uşor condiţiile din inegalităţile asupra lui u , v şi w procedăm astfel :

1. facem tabloul cu semnele funcţiilor u − v , u − w şi v − w
2. utilizând tabloul explicităm uşor inegalităţile, deoarece de exemplu $u(x) \leq v(x) \iff u(x) - v(x) \leq 0$.

1. Pentru $u(x) = x + 1$, $v(x) = x^2 + 2$ şi $w(x) = 3x$ avem tabloul următor :

x		$\frac{1}{2}$		1			2		
$u(x)-v(x)$	−		−	−		−	−		−
$u(x)-w(x)$	+	0	−	−		−	−		−
$v(x)-w(x)$	+		+	0	−	−	0	+	+

deci:

a) $x \in \left(-\infty , \frac{1}{2}\right] \longrightarrow u(x) \leq v(x)$ şi $u(x) \geq w(x)$, deci $f(x) = w(x)$

b) $x \in \left(\frac{1}{2} , 1\right] \longrightarrow u(x) \leq v(x)$ şi $u(x) \leq w(x)$, deci $f(x) = u(x)$

c) $x \in (1\ ,\ 2] \longrightarrow u(x) \le v(x)$ şi $u(x) \le w(x)$, deci $f(x) = u(x)$

d) $x \in (2\ ,\infty) \longrightarrow u(x) \le v(x)$ şi $u(x) \le w(x)$, deci $f(x) = u(x)$

Aşadar,

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{dacă } x \le 1/2 \\ x + 1 & \text{dacă } x > 1/2 \end{cases}$$

5. Pentru explicitarea lui f procedăm astfel:

(1) facem tabloul de variaţie al funcţiei $y(t) = t^2$

(2) considerând pe x în primul interval de monotonie (dedus din tabel) la dreapta lui -1 (deoarece ne interesează doar valorile $t \ge -1$) calculăm minimul lui $y(t)$ pentru $t \in [-1\ ,\ x]$.

(3) considerând pe x în următorul interval de monotonie calculăm din nou maximul lui $y(t)$ pe intervalul $t \in [-1\ ,\ x\ ]$ etc.

t	$-\infty$	-1		x		0			x			$+\infty$
y'			$-$		$-$	0	$+$	$+$		$+$	$+$	$+$
y		1	↘		↘	0		↗		↗	↗	

a) pentru primul interval de monotonie , $x \in (-1\ ,\ 0)$, funcţia $y(t) = t^2$ are pe intervalul $[-1\ ,\ x]$ un singur punct de minim, în $t = x$; valoarea sa este $y(x) = x^2$. Fiind un singur punct de minim el este şi minimul global (absolut) al lui $y(t)$ pe intervalul $[-1\ ,x]$, deci valoarea lui f este $f(x) = x^2$, pentru $x \in (-1\ ,\ 0]$.

b) pentru al doilea interval de monotonie , $x \in (0\ ,\ \infty)$, funcţia $y(t) = t^2$ are pe intervalul $[-1\ ,\ x]$ un singur punct de minim, în $t = 0$; valoarea sa este $y(0) = 0$. Fiind un singur punct de minim, avem $f(x) = 0$ pentru $x \in (0\ ,\ \infty)$, deci

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dacă } x \in (-1\ ,0] \\ 0 & \text{dacă } x \in (0\ ,\infty) \end{cases}$$

Să observăm că din acelaşi tablou de variaţie putem explicita funcţia $g(x) = \max\limits_{1 \le t \le x} t^2$. Astfel :

a) pentru $x \in (-1\ ,\ 0]$ funcţia $y(t) = t^2$ are un singur maxim, pe $[-1\ ,\ x]$ în $t = -1$; valoarea sa este $M = y(1) = 1$. Deci $g(x) = 1$, pentru $x \in (1\ ,\ 0]$.

b) pentru $x \in (0\ ,\ +\infty)$, $y(t) = t^2$ are două puncte de maxim, în $t_1 = -1$ şi $t_2 = x$; valorile lor sînt $M_1 = y(1) = 1$ şi $M_2 = y(x) = x^2$. Valoarea lui f este maximul global, deci:

$$g(x) = \max(1\ ,\ x\ ) \text{ pentru } x \in (0\ ,+\infty).$$

$$\text{Rezultă } g(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \in [-1\ ,\ 0] \\ \max(1\ ,\ x^2) & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

$$\text{Deci } g(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \in (-1\ ,\ 0] \\ 1 & \text{dacă } x \in (0\ ,\ 1] \\ x^2 & \text{dacă } x > 1 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \in (-1\ ,\ 1) \\ x^2 & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$$

9. Din tabelul de variaţie al lui $y(t) = \dfrac{t^4}{(t+7)^3}$

t	-2			x			0			x			$+\infty$
$y'(t)$		$-$	$-$		$-$	$-$	0	$+$	$+$		$+$	$+$	
$y(t)$	$\frac{16}{125}$	$\searrow$			$\searrow$		0	$\nearrow$			$\nearrow$	$\nearrow$	

1. pentru $x \in (-2\ ,\ 0]$, $y(t)$ are un singur minim pe intervalul $[-2\ ,\ x]$, în $t = x$; valoarea sa este $m = y(x) = \dfrac{x^4}{(x+7)^3}$

2. pentru $x > 0$, $y(t)$ are un singur minim, pe $[-2\ ,\ x]$,

în $t = 0$; valoarea sa este $m = y(0) = 0$. Deci

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{(x+7)^3} & \text{dacă } x \in (-2\ ,\ 0] \\ 0 & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

Analog, pentru $g(x) = \max\limits_{-2 \le t \le x} \dfrac{t^4}{(t+7)^3}$ avem

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{16}{125} & \text{dacă } x \in (-2\ ,\ 0] \\ \max\left(\dfrac{16}{125}, \dfrac{t^4}{(x+7)^3}\right) & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

10. Din tabloul de variație al lui $y(t) = t^2 \ln t$

t	0		x			$1/\sqrt{e}$			x		$+\infty$
$y'(t)$		$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$		$+$	$+$
$y(t)$	0	$\searrow$		$\searrow$		$-1/2e$	$\nearrow$			$\nearrow$	

deducem :

(a) dacă $x \in \left[\,0\ ,\ \dfrac{1}{\sqrt{e}}\,\right]$ funcția $y(t) = t^2 \ln t$ are, pentru $t \in (0\ ,\ x]$ un singur supremum $S = \lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} y(t) = 0$.

(b) $x \in \left(\dfrac{-1}{\sqrt{e}}\ ,\ \infty\right)$, funcția $y(t)$ are două valori supreme: $S_1 = 0$ și $M_1 = y(x) = x^2 \ln x$.

$$\text{Deci } f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \left(0\ ,\ \dfrac{-1}{\sqrt{e}}\right] \\ \max(0\ ,\ x^2 \ln x) & x \in \left(\dfrac{-1}{\sqrt{e}}\ ,\ \infty\right) \end{cases}$$

II. Să se studieze bijectivitatea pentru:

1. $f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \dfrac{1}{x} & x \in Q \text{ , } x \neq 0 \\ x & x \in R - Q \end{cases}$

2. $f(x) = P(x)$, P fiind un polinom de grad impar.

3. $f(x) = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 1})$ $a > 0$, $a \neq 1$.

4. $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x \in \mathbb{Q} \\ \dfrac{2}{x} & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

5. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $f(x) = A \cdot x$ unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

6. $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $f(x) = A \cdot x$ unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{pmatrix}$

7. $f : \mathbb{R}^2_+ \longrightarrow \mathbb{R}^2_+$ $f(x,y) = (\lg x + 2 \cdot \lg y \text{ , } 3 \cdot \lg x - 2 \cdot \lg y)$

III. Să se studieze inversabilitatea funcţiilor hiperbolice:

1. $sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ (sinus hiperbolic)

2. $ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ (cosinus hiperbolic)

3. $th(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ (tangenta hiperbolică)

4. $cth(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ (cotangeta hiperbolică)

şi să se scrie inversele lor.

IV. 1. Arătaţi că funcţiile $f(x) = x^2 - x + 1$,

$f : \left[\frac{1}{2}, \infty\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ şi $g(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{3}{4}}$,

$g : \left[\frac{1}{2}, \infty\right) \longrightarrow R$ sunt inverse una alteia.

2. Arătaţi că $f(x) = \frac{1 - x}{1 + x}$ coincide cu inversa ei.

3. Determinaţi parametri a,b,c,d astfel încât

$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ să coincidă cu inversa ei.

4. Arătaţi că funcţia $f : (0, 1] \longrightarrow R$ definită prin

$f(x) = \frac{4}{3^n} - x$, dacă $x \in \left[\frac{1}{3^n}, \frac{1}{3^{n-1}}\right]$ este bijectivă.

5. Pe ce subinterval funcţia $f : \left[-\frac{1}{2}, \infty\right) \longrightarrow R$

$f(x) = \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}}$ este bijectivă ?

INDICATII.

4. Pentru a uşura raţionamentul, se schiţează graficul lui f.

5. Se utilizează formula de descompunere a radicalilor supra-

puşi: $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - C}{2}}$,

unde $C = \sqrt{A^2 - B}$.

MONOTONIE SI MARGINIRE PENTRU SIRURI SI FUNCTII

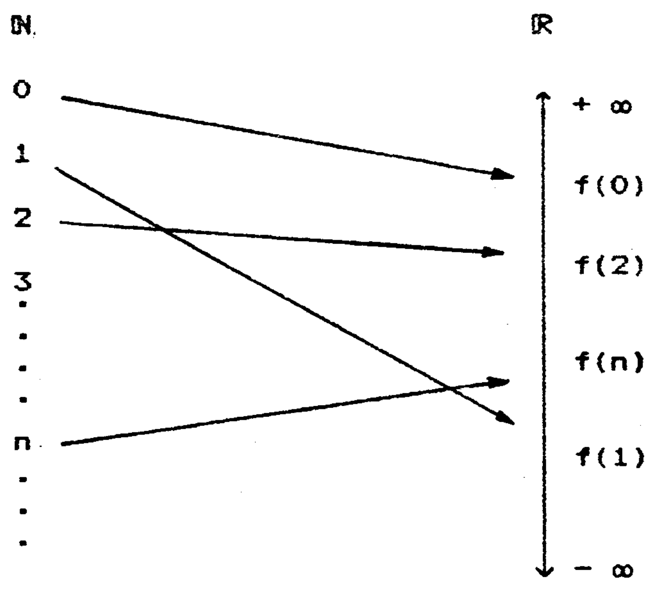
Un şir este o funcţie definită pe mulţimea numerelor naturale. Domeniul unei astfel de funcţii este deci mulţimea numerelor naturale $\mathbb{N}$. Codomeniul şi legea de corespondenţă pot fi oarecare.

În cele ce urmează vom considera doar şiruri de numere reale, adică şiruri avînd drept codomeniu mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale.

$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ ŞIR DE NUMERE REALE

Pentru astfel de funcţii, domeniul şi codomeniul fiind totdeauna aceleaşi, mai trebuie precizată doar legea de corespondenţă f , ceea ce revine la a preciza mulţimea valorilor sale :

$$f(0)\ ,\ f(1)\ ,\ f(2)\ ,\ \dots\ ,\ f(n)\ ,\ \dots$$



Pentru comoditatea scrierii se notează de exemplu:

$$f(0) = a_1\ ,\ f(1) = a_2\ ,\ \dots\ ,\ f(n) = a_n\ ,\ \dots$$

Deci pentru a cunoaşte un şir este necesar şi suficient să cu-

noaştem mulţimea valorilor sale: a_0 , a_1 , ... , a_n , ...
Această mulţime se notează prescurtat cu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Prin urmare un şir este un caz particular de funcţie. Trecerea de la o funcţie la un şir se face astfel:

(s_1) înlocuind domeniul D cu $\mathbb{N}$

(s_2) înlocuind codomeniul E cu $\mathbb{R}$

(s_3) înlocuind variabila x cu n

(sau cu m , sau i , etc)

(s_4) înlocuind f(x) cu a_n

	DOMENIUL	CODOMENIUL	VARIABILA	LEGEA DE CORESP.
Functie	D	E	x	f(x)
Sir	$\mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	n	a_n

În cele ce urmează vom utiliza acest mod de trecere de la o funcţie oarecare la un şir, pentru a obţine noţiunile de monotonie , mărginire şi limită ale unui şir drept cazuri particulare ale aceloraşi noţiuni pentru funcţii.

In mod frecvent putem atasa unui sir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o functie, obtinuta prin inlocuirea lui n cu x in expresia lui a_n (a_n devine f(x)).

EXEMPLU: Şirului $a_n = \frac{n+3}{2n+1}$ îi putem ataşa funcţia: $f(x) = \frac{x+3}{2x+1}$.

Totuşi există şiruri cărora nu le putem ataşa o funcţie prin acest procedeu. De exemplu $a_n = \frac{n!}{n+1}$.

Cu ajutorul funcţiei ataşate unui şir putem rezolva mai uşor problemele de monotonie, mărginire şi convergenţă a şirurilor, aşa cum vom vedea în cele ce urmează.

Utilizarea unei funcţii pentru studiul monotoniei, mărginirii şi a limitei unui şir oferă avantajul utilizării derivatei şi a tabelului de variaţie.

Pe de altă parte, este util să observăm că atît monotonia cît şi mărginirea şi limita unui şir sunt cazuri particulare ale aceloraşi noţiuni definite pentru funcţii. Această particularizare se obţine cu ajutorul celor patru etape $(s_1) - (s_4)$ menţionate.

Iată cum se obţine această particularizare, mai întîi pentru monotonie şi mărginire, apoi şi pentru limită.

FUNCTII MONOTONE	SIRURI MONOTONE
a) funcţia $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ este monoton crescătoare dacă: $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 \le x_2 \longrightarrow f(x_1) \le f(x_2)$	a')şirul $f:\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ este monoton crescător dacă: $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}, n_1 \le n_2 \longrightarrow a_{n_1} \le a_{n_2}$ (1) Dacă este îndeplinită condiţia (1) luînd în particular $n_1=n$ şi $n_2=n+1$ deducem $a_n \le a_{n+1}$ pentru orice n (2) În concluzie (1) $\longrightarrow$ (2) Este adevărată şi implicaţia reciprocă. Demonstraţia ei se poate deduce din următorul exemplu: dacă este îndeplinită (2) şi luăm $n_1=7, n_2=11$, avem $n_1 \le n_2$ şi din aproape în aproape $a_7 \le a_8, a_8 \le a_9, a_9 \le a_{10}$ şi $a_{10} \le a_{11}$, deci $a_7 \le a_{11}$. Prin urmare (1) $\longleftrightarrow$ (2) . Deoarece condiţiile (1) şi (2) sunt echivalente, iar (2) este mai

	comodă, pentru definiţia şirului monoton crescător se utilizează această condiţie. Dar nu trebuie să pierdem din vedere că ea este echivalentă cu acea condiţie care se obţine din definiţia monotoniei funcţiilor, prin particularizările (s_1) - (s_4), ce caracterizează trecerea de la funcţie la şir.
b) funcţia $f: D \longrightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$ este monoton descrescătoare dacă: $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$	b') şirul $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ este monoton descrescător dacă: $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}, n_1 \leq n_2 \implies a_{n_1} \geq a_{n_2}$ (3) Se poate arăta că această condiţie este echivalentă cu: $a_n \geq a_{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ (4)
FUNCTII MARGINITE	SIRURI MARGINITE
a) $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ este <u>mărginită inferior</u> dacă nu are valori spre $-\infty$, adică $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in D$, $f(x) \geq a$	a') şirul $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ este <u>mărginit inferior</u> dacă nu are valori spre $-\infty$, adică $\exists a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \geq a$
b) $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, este <u>mărginită superior</u> dacă nu are valori spre $+\infty$, adică $\exists b \in \mathbb{R}, \forall x \in D$ $f(x) \leq b$.	b') şirul $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ este <u>mărginit superior</u> dacă nu are valori spre $+\infty$, adică $\exists b \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{N}$ $a_n \leq b$
c) $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ este <u>mărginită</u> dacă este mărginită	c') şirul $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ este <u>mărginit</u> dacă este mărginit in-

inferior şi superior, adică $\exists a,b\in R, \forall x\in D \quad a \le f(x) \le b$, cu alte cuvinte există un interval [a,b] în care sunt toate valorile funcţiei. Acest interval nu este,in general,simetric faţă de origine, dar îl putem considera astfel lărgind una din extremităţi suficient de mult.În acest caz [a,b] devine [-M , M] iar condiţia de mărginire are forma: $\exists M>0, \forall x\in D \quad -M \le f(x) \le M$ adică: $\exists M>0, \forall x\in D \quad \lvert f(x)\rvert \le M$	ferior şi superior, adică $\exists a,b\in R, \forall n\in N \quad a \le a_n \le b$ <u>SAU</u> $\exists M>0, \forall n\in N \quad \lvert a_n\rvert \le M$

METODE PENTRU STUDIUL MONOTONIEI SI MARGINIRII

METODE PENTRU FUNCŢII	METODE PENTRU ŞIRURI
Studiul monotoniei	
1. <u>Utilizarea definiţiei</u> : se consideră $x_1 \le x_2$ şi se compară diferenţa $f(x_1) - f(x_2)$ cu zero.Aceasta se poate face prin <u>minorări</u> şi <u>majorări</u> succesive,sau <u>aplicând teorema lui Lagrange</u> funcţiei f pe interva-	1'. <u>Utilizarea definiţiei</u> : se compară diferenţa $a_{n+1} - a_n$ cu zero,iar pentru şiruri cu termeni pozitivi putem compara câtul a_{n+1} / a_n cu unu.Putem face <u>minorări</u> şi <u>majorări</u> succesive,sau să <u>aplicăm teorema lui Lagrange func-</u>

lul $[x_1, x_2]$. 2. Utilizarea tabloului de variaţie.(în cazul funcţiilor derivabile) După cum se ştie,din tabloul de variaţie al unei funcţii derivabile avem informaţii exacte atât despre monotonie cât şi despre mărginirea unei funcţii. 3. Utilizarea teoremei lui Lagrange: permite înlocuirea diferenţei $f(x_2) - f(x_1)$ cu $f'(c)$, care se compară apoi cu zero.	ţiei ataşate şirului considerat. 2. Utilizarea tabloului de variaţie pentru funcţia ataşată. studiem monotonia funcţiei ataşate şirului dat şi utilizând criteriul cu şiruri se deduce că monotonia şirului este dată de monotonia acestei funcţii, pe intervalul $[0 ,\infty)$,(vezi Metoda 10 punctul c) 3. Utilizarea teoremei lui Lagrange pentru funcţia ataşată.
Studiul mărginirii	
1. Utilizarea definiţiei. 2. Utilizarea tabloului de variaţie.	1'.Utilizarea definiţiei. 2'.Utilizarea tabloului de variaţie pentru funcţia ataşată. 3'.Dacă şirul se descompune într-un număr finit de subşiruri mărginite,el este mărginit. 4'.Utilizarea monotoniei. Dacă un şir este monoton cel puţin jumătate din problema mărginirii este rezolvată şi anume: a)dacă şirul este monoton crescător,el este mărginit inferior de

	primul termen şi mai trebuie găsită doar marginea superioară. b)dacă şirul este monoton descrescător,el este mărginit superior de primul termen şi mai trebuie găsită doar marginea inferioară. C)DACA ŞIRUL ESTE MONOTON DESCRESCATOR ŞI CU TERMENI POZITIVI,EL ESTE MARGINIT.

EXERCITII:

I. Studiaţi monotonia şi mărginirea funcţiilor:

1. $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{dacă } x \le 1 \\ x^2 + x + 1 & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$

2. $f(x) = x^4 + | 3x^2 - 4 |$

3. $f(x) = (\ln x)^{\ln x}$, $f : [1,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

4. $f(x) = \dfrac{mx + n}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

5. $f(x) = \sqrt{x - 2 - \sqrt{2x - 5}}$, $f : [3,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

6. $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

Raspunsuri:

3. Putem scrie $f(x) = e^{\ln x \ln(\ln x)}$ şi avem tabloul de variaţie:

x	1				$e^{1/e}$					
$f'(x)$		−	−	−	−	0	+	+	+	+	+
$f(x)$	1		↘		$e^{-1/e}$		↗			

deci funcţia este descrescătoare pe intervalul $(1, e^{1/e})$ şi crescătoare pe $(e^{1/e}, \infty)$. Este mărginită inferior, minimul fiind $m = e^{-1/e}$ şi nu este mărginită superior.

5. Utilizăm formula de descompunere a radicalilor suprapuşi :

$$f(x) = \sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + C}{2}} - \sqrt{\frac{A - C}{2}} , \quad \text{cu } C = A^2 - B$$

6. Fie $x_1 < x_2$. Pentru a obţine semnul diferenţei $f(x_1) - f(x_2)$ putem aplica teorema lui Lagrange funcţiei date, pe intervalul $[x_1, x_2]$ (sunt îndeplinite condiţiile teoremei): există deci $c \in \mathbb{R}$ astfel încât:

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2) = \frac{1}{1 - c^2}(x_1 - x_2) < 0$$

deci funcţia este crescătoare.

II. Studiaţi monotonia şi mărginirea şirurilor :

1. $a_n = \dfrac{\ln n}{n}$

2. $a_n = \sqrt[n]{n}$ determinaţi şi cel mai mic termen al şirului.

3. $a_n = n a^n$ determinaţi şi cel mai mic termen al şirului.

4. $a_n = \dfrac{n - 1}{\ln n} - \sqrt{n}$, pentru $n \geq 2$.

5. $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $c_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}$, cu

$\alpha \in (0\ ,\ 1)$, $d_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\gamma_n}$, γ_n fiind valoarea intermediară ce se obține aplicând teorema lui Lagrange funcției $f(x) = \ln x$ pe intervalele $[n, n + 1]$.

Raspunsuri:

2. Funcția atașată șirului este $f(x) = x^{1/x}$. Din tabloul de variație:

x	2			e		3		
$f'(x)$		$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\nearrow$	$f(e)$	$\searrow$		$\searrow$	

deducem, conform criteriului cu șiruri (criteriul lui Heine, vezi Metoda 10, punctul c)), tipul de monotonie al șirului studiat. Șirul are aceeași monotonie ca și funcția atașată, deci este descrescător pentru $n \geq 3$. Deoarece șirul este descrescător dacă $n \geq 3$, pentru a afla cel mai mare termen trebuie comparați doar a_2 și a_3. Deducem că cel mai mare termen al șirului este:

$a_3 = \sqrt[3]{3}$.

3. Funcția atașată șirului este $f(x) = x\ a^x$. Din tabelul de variație pentru $a \in (0,1)$:

x	0			$(-\ln a)^{-1}$				
$f'(x)$		$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$	

utilizând punctul c) de la Metoda 10 deducem că șirul dat este crescător pentru n mai mic sau egal cu partea întreagă a lui

$(-\ln a)^{-1}$ şi este descrescător pentru $n \geq [(-\ln a)^{-1}] + 1$.

Deoarece $\lim\limits_{\substack{a \to 0 \\ a>0}} (-\ln a)^{-1} = 0$ şi $\lim\limits_{\substack{a \to 1 \\ a<1}} (-\ln a)^{-1} = +\infty$,

deducem că intervalul $\left[1 , [(-\ln a)^{-1}] \right]$ în care şirul este crescător <u>poate fi oricât de mare şi oricât de mic.</u>

6. Şirul de termen general a_n este crescător, şirul de termen general b_n este descrescător, iar şirul c_n este crescător dacă $\alpha \in [0 , n - \gamma_n']$ şi este descrescător pentru $\alpha \in [n-\gamma_n,1]$.

III Utilizând teorema lui Lagrange:

1. să se demonstreze inegalitatea $|\sin x| \leq |x|$ pentru orice x real, apoi să se arate că şirul $a_1 = \sin x$, $a_2 = \sin \sin x$, ... , $a_n = \sin \sin \ldots \sin x$, este monoton şi mărginit oricare ar fi x , iar limita sa este zero.

2. să se studieze monotonia şi mărginirea şirurilor :

$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, $b_n = \arcsin(\frac{2\sqrt{n}}{1+n})$, $c_n = \frac{\ln n}{n^2 + n}$

$d_n = \frac{n+1}{2n+1} + 2\ln n$, $e_n = n \cdot \sqrt{\frac{n+2}{n+3}}$

Raspunsuri:

1. $|\sin x| \leq |x| \iff \left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq 1$. Din teorema lui Lagrange aplicată funcţiei $f(t) = \sin t$ pe intervalul $[x,0]$ sau $[0,x]$, după cum x este negativ sau pozitiv, se obţine $\left|\frac{\sin x}{x}\right| = |\cos c| \leq 1$. Şirul satisface relaţia de recurenţă: $a_{n+1} = \sin a_n$, deci dacă $\sin x > 0$ se deduce că şirul este descrescător, iar dacă $\sin x < 0$ şirul este crescător. Evident că

este mărginit între -1 şi 1 . Notând cu L limita sa şi trecând la limită în relaţia de recurenţă obţinem $L = \sin L$, deci $L = 0$.

2. a) $a_{n+1} - a_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =$

$= \frac{f(n+1) - f(n)}{n+1-n}$, unde $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ defineşte funcţia ataşată şirului.

b) Aplicând teorema lui Lagrange funcţiei ataşată şirului, pe intervalul $[n,n+1]$, deducem $a_{n+1} - a_n = f'(c_n)$. Trebuie deci stabilit semnul derivatei:

$$f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \cdot \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \right]$$

adică semnul lui $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$. Din tabloul de mai jos deducem $g(x) > 0$ pentru $x > 0$,

deci $a_{n+1} - a_n > 0$.

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$ $\quad$ $-$ $\quad$ $-$ $\quad$ $-$ $\quad$ $-$
$g(x)$	$\searrow$ $\quad$ $\searrow$ $\quad$ $\searrow$

IV. 1. Fie I un interval oarecare şi $f : I \longrightarrow I$ o funcţie. Să se arate că şirul definit prin relaţia de recurenţă $a_{n+1} = f(a_n)$, cu a_0 dat, este:

(a) crescător dacă $f(x) - x > 0$ pe I

(b) descrescător dacă $f(x) - x < 0$ pe I.

2. Dacă şirul $(a_n)_{n\in N}$ este crescător, iar şirul $(b_n)_{n\in N}$ este descrescător şi $a_n \le b_n$ pentru orice n , atunci:

(a) cele două şiruri sunt mărginite, deci convergente.

(b) dacă $\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$ atunci ele au aceeaşi limită.

(c) să se aplice aceste rezultate şirurilor date prin formulele de recurenţă: $a_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n}$, $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ cu a_0 şi b_0 daţi.

REZOLVARI:

1. $a_{n+1} - a_n = f(a_n) - a_n > 0$ în primul caz.

2. cele două şiruri sunt mărginite între a_1 şi b_1 , deci şirurile sunt convergente, deoarece sunt şi monotone. Fie l_1 şi respectiv l_2 limitele lor. Din ipoteza de la (b) rezultă $l_1 = l_2$.

(c) şirurile au termeni pozitivi şi:

$$b_n^2 - a_n^2 = \left[\frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2}\right]^2 > 0 .$$

V. Să se studieze mărginirea şirurilor:

1. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{n+2}, \ldots$

2. $\sin 1 , \frac{1}{2} , \sin\left(\frac{1}{2}\right) , \frac{1}{2} , \ldots , \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) , \frac{1}{2^n} , \ldots$

3. $1 , 2 , \frac{1}{3} , 4 , \frac{1}{5} , 6 , \ldots$

4. $2 , 4 , \frac{9}{4} , \frac{27}{8} , \ldots , \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$

5. $\cos(\pi/4) , \cos(\cos(\pi/4)) , \ldots$

6. $1 , 2 , \sqrt{2} , \frac{3}{2} , \sqrt{3}, \ldots , a_n , b_n , \ldots$ cu $a_0 = 1$, $b_0 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$, $b_{n+1} = \frac{1 + b_n}{2}$

RASPUNS: Fiecare şir se descompune în două subşiruri mărginite (chiar convergente, având aceeaşi limită) deci sunt mărginite (convergente).

3. LIMITE DE SIRURI SI DE FUNCTII

Definiţia monotoniei şi mărginirii şirurilor a fost dedusă din definiţiile corespunzătoare pentru funcţii, prin procedeul arătat, de înlocuire a lui x cu n şi a lui $f(x)$ cu a_n. Cu acelaşi procedeu vom obţine şi definiţia limitei unui şir din definiţia limitei unei funcţii. Această metodă de particularizare a unei definiţii pentru funcţii în scopul obţinerii definiţiei analoage pentru şiruri pune în evidenţă legătura dintre şiruri şi funcţii. Şirurile fiind cazuri particulare de funcţii, este normal ca definiţiile monotoniei, mărginirii şi limitei unui şir să fie cazuri particulare ale definiţiilor corespunzătoare pentru funcţii.

LIMITE DE FUNCŢII

Definiţia limitei unei funcţii se bazează pe noţiunea de vecinătate a unui punct.

Intuitiv, mulţimea $V \subset \mathbb{R}$ este vacinătate pentru punctul $x_o \in \mathbb{R}$, dacă (1) $x \in V$ şi în plus, (2) V conţine şi puncte vecine cu x_o (la stînga şi la dreapta).

Evident că dacă există un interval deschis (a,b) astfel încît $x_o \in (a,b) \subset V$, atunci cele două condiţii sunt îndeplinite.

<u>În particular, orice interval deschis (a,b) ce conţine pe x_o- satisface ambele condiţii, deci este vecinătate pentru x_o.</u>

Pentru puncte finite vom considera în continuare ca vecinătăţi intervale deschise cu centrul în acele puncte, deci de forma:

$$V_l = (l - \varepsilon , l + \varepsilon) \qquad V_{x_o} = (x_o - \delta , x_o + \delta)$$

şi mulţimi care conţin astfel de intervale.

Pentru $+\infty$ nu are sens $V_\infty = (\infty - \varepsilon , \infty + \varepsilon)$, deci trebuie găsită o altă formă pentru vecinătaţile lui $+\infty$. Pentru aceasta observăm că la dreapta lui $+\infty$ nu putem considera puncte, deci $\infty + \varepsilon$ trebuie înlocuit cu $+\infty$. De asemenea, deoarece $\infty - \varepsilon = \infty$, înlocuim pe $\infty - \varepsilon$ cu ε. Aşadar, vom considera vecinătăţile lui $+\infty$ de forma:

$$V_\infty = (\varepsilon , \infty)$$

şi mulţimi care conţin astfel de intervale.

Analog, vecinătăţile lui $-\infty$ sunt de forma:

$$V_{-\infty} = (-\infty , \varepsilon)$$

Definiţia limitei unei funcţii într-un punct exprimă condiţia ca atunci cînd x se apropie de x_o , $f(x)$ să se apropie de valoarea l a limitei.

Cu ajutorul vecinătăţilor, această condiţie se descrie prin:

$\lim_{x \to x_o} f(x) = l \iff$

$\Leftrightarrow \quad [\ \forall V_l \quad \exists V_{x_o} \quad \forall x \in V_{x_o},\ x \neq x_o \Rightarrow f(x) \in V_l\ ] \qquad (***)$

După cum am arătat, pentru vecinătățile V_l și V_{x_o} din definiția (***), există trei forme esențiale, corespunzător punctelor finite și respectiv lui $+\infty$ și $-\infty$.

<u>Convenție:</u> **Pentru scrierea vecinătăților lui l se folosește litera ε, iar pentru scrierea vacinătăților lui x_o se folosește litera δ.**

Avem deci următoarele cazuri:

a) x_o - finit $\Rightarrow V_{x_o} = (x_o - \delta\ ,\ x_o + \delta)$

iar $x \in V_{x_o} \Leftrightarrow x \in (x_o - \delta\ ,\ x_o + \delta) \Leftrightarrow x_o - \delta < x < x_o + \delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\delta < x - x_o < \delta \Leftrightarrow |\ x - x_o\ | < \delta$

b) $x_o = +\infty \Rightarrow V_{x_o} = V_\infty = (\delta\ ,\ +\infty)$

iar condiția $x \in V_{x_o}$ devine $x > \delta$

c) $x_o = -\infty \Rightarrow V_{x_o} = V_{-\infty} = (-\infty\ ,\ \delta)$

iar condiția $x_o \in V_{x_o}$ devine $x < \delta$

a') l - finit $\Rightarrow V_l = (l - \varepsilon\ ,\ l + \varepsilon)$

deci condiția $f(x) \in V_l$ devine $f(x) \in (l - \varepsilon\ ,\ l + \varepsilon) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < f(x) - l < \varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |\ f(x) - l\ | < \varepsilon$

b') $l = +\infty \Rightarrow V_l = V_{+\infty} = (\varepsilon\ ,\ +\infty)$

iar condiția $f(x) \in V_l$ devine $f(x) > \varepsilon$

c') $l = -\infty \Rightarrow V_l = V_{-\infty} = (-\infty\ ,\ \varepsilon)$

iar condiția $f(x) \in V$ devine $f(x) < \varepsilon$

Toate aceste cazuri apar în tabelul 3.1.

Tabelul 3.1

$x_o \backslash l$	l - finit	$l = +\infty$	$l = -\infty$
x_o finit	$V_{x_o}=(x_o-\delta, x_o+\delta)$ $V_l=(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$	$V_{x_o}=(x_o-\delta, x_o+\delta)$ $V_l=(\varepsilon,\infty)$	$V_{x_o}=(x_o-\delta, x_o+\delta)$ $V_l=(-\infty, \varepsilon)$
	$x \in V_{x_o}$ <=> <=> $\|x-x_o\| < \delta$	$x \in V_{x_o}$ <=> <=> $\|x-x_o\| < \delta$	$x \in V_{x_o}$ <=> <=> $\|x-x_o\| < \delta$
	$f(x) \in V_l$ <=> <=> $\|f(x)-l\| < \varepsilon$	$f(x) \in V_l$ <=> <=> $f(x) > \varepsilon$	$f(x) \in V_l$ <=> <=> $f(x) < \varepsilon$
$x_o = +\infty$	$V_{x_o}=(\delta,\infty)$ $V_l=(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$	$V_{x_o}=(\delta,\infty)$ $V_l=(\varepsilon,\infty)$	$V_{x_o}=(\delta,\infty)$ $V_l=(-\infty, \varepsilon)$
	$x \in V_{x_o}$ <=> <=> $x > \delta$	$x \in V_{x_o}$ <=> <=> $x > \delta$	$x \in V_{x_o}$ <=> <=> $x > \delta$
	$f(x) \in V_l$ <=> <=> $\|f(x)-l\| < \varepsilon$	$f(x) \in V_l$ <=> <=> $f(x) > \varepsilon$	$f(x) \in V_l$ <=> <=> $f(x) < \varepsilon$
$x_o = -\infty$	$V_{x_o}=(-\infty,\delta)$ $V_l=(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$	$V_{x_o}=(-\infty,\delta)$ $V_l=(\varepsilon,\infty)$	$V_{x_o}=(-\infty,\delta)$ $V_l=(-\infty, \varepsilon)$
	$x \in V_{x_o}$ <=> <=> $x < \delta$	$x \in V_{x_o}$ <=> <=> $x < \delta$	$x \in V_{x_o}$ <=> <=> $x < \delta$
	$f(x) \in V_l$ <=> <=> $\|f(x)-l\| < \varepsilon$	$f(x) \in V_l$ <=> <=> $f(x) > \varepsilon$	$f(x) \in V_l$ <=> <=> $f(x) < \varepsilon$

Considerând în definiția (***) fiecare situație corespunzătoare lui x_o și l, avem în total 9 forme pentru definiția limitei unei

funcții. Utilizând tabloul 3.1 avem următoarele nouă situații:

(l_1) x_0 – finit , l – finit

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \iff$$

$$\iff \left[\forall\, \varepsilon>0 \;\; \exists\, \delta_\varepsilon>0 \;\; \forall\, x\neq x_0,\;\; |\,x-x_0\,|<\delta \;\Rightarrow\; |\,f(x)-l\,|<\varepsilon\right]$$

(l_2) $x_0 = +\infty$, l – finit

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l \iff$$

$$\iff \left[\forall\, \varepsilon>0 \;\; \exists\, \delta_\varepsilon>0 \;\; \forall\, x>\delta_\varepsilon \;\Rightarrow\; |\,f(x)-l\,|<\varepsilon\right]$$

(l_3) $x_0 = -\infty$, l – finit

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \iff$$

$$\iff \left[\forall\, \varepsilon>0 \;\; \exists\, \delta_\varepsilon \;\; \forall\, x<\delta_\varepsilon \;\Rightarrow\; |\,f(x)-l\,|<\varepsilon\right]$$

(l_4) x_0 – finit , $l = +\infty$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \iff$$

$$\iff \left[\forall\, \varepsilon \;\; \exists\, \delta_\varepsilon>0 \;\; \forall\, x\neq x_0,\;\; |\,x-x_0\,|<\delta_\varepsilon \;\Rightarrow\; f(x)>\varepsilon\right]$$

(l_5) $x_0 = +\infty$, $l = +\infty$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty \iff$$

$$\iff \left[\forall\, \varepsilon \;\; \exists\, \delta_\varepsilon \;\; \forall\, x>\delta_\varepsilon \;\Rightarrow\; f(x)>\varepsilon\right]$$

(l_6) $x_0 = -\infty$, $l = +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \iff$$

$$\iff \left[\forall\, \varepsilon \;\; \exists\, \delta_\varepsilon \;\; \forall\, x<\delta_\varepsilon \;\Rightarrow\; f(x)>\varepsilon\right]$$

(l_7) x_0 – finit , $l = -\infty$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \iff$$

$$\iff \left[\forall\, \varepsilon \;\; \exists\, \delta_\varepsilon>0 \;\; \forall\, x\neq x_0,\;\; |x-x_0|<\delta_\varepsilon \;\Rightarrow\; f(x) < \varepsilon\right]$$

(l_8) $x_0 = +\infty$, $l = -\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad [\ \forall \varepsilon \quad \exists\ \delta_\varepsilon \quad \forall x > \delta_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad f(x) < \varepsilon\ ]$$

(l_p) $\quad x_0 = -\infty\ ,\ \ l = -\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad [\ \forall \varepsilon \quad \exists\ \delta_\varepsilon \quad \forall\ x < \delta_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad f(x) < \varepsilon\ ]$$

EXERCIŢII:

I. Utilizând definitia, să se arate că:

1. $\lim_{x \to 5} (3x - 1) = 14$
2. $\lim_{x \to 1} \dfrac{2x + 3}{3x + 2} = 1$
3. $\lim_{x \to 2} \sqrt{x + 2} = 2$
4. $\lim_{x \to 1} \dfrac{1}{(x - 1)^2} = +\infty$
5. $\lim_{x \to 0} \dfrac{-1}{5x^2} = -\infty$
6. $\lim_{x \to a} \sin x = \sin a$
7. $\lim_{x \to a} \ln x = \ln a$

Răspunsuri:

În toate cazurile avem x_0 – finit.

2. Parcurgem următoarele etape:

a) particularizăm definiţia limitei

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x + 3}{3x + 2} = 1 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad [\ \forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall\ x \neq 1, \quad |x - 1| < \delta_\varepsilon \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left| \frac{2x + 3}{3x + 2} - 1 \right| < \varepsilon\ ]$$

(ţinând cont de forma vecinătăţii).

b) considerăm $\varepsilon > 0$ oarecare; căutăm pe δ_ε astfel:.

c) facem calcule în expresia $|\ f(x) - l\ |$ punând în evidenţă modulul $|\ x - x_0\ |$.

$$\left| f(x)-l \right| = \left| \frac{2x+3}{3x+2} - 1 \right| = \frac{|x-1|}{|3x+2|}.$$

d) majorăm (minorăm) expresia obținută, ținînd cont că ne interesează numai acele valori ale lui x pentru care $|x-x_o| < \delta_\varepsilon$.

Deci: $\dfrac{|x-1|}{|3x+2|} < \dfrac{\delta_\varepsilon}{|3x+2|}$.

e) dacă expresia care mai depinde de x este mărginită (continuă) într-o vecinătate a lui x_o , putem majora în continuare, pentru a elimina pe x . Avem:

$$\frac{\delta_\varepsilon}{|3x+2|} = \delta_\varepsilon \frac{1}{|3x+2|} < \delta_\varepsilon \frac{1}{2}$$

deoarece în intervalul [0,2] de exemplu, care este o vecinătate a lui $x_o = 1$, funcția $g(x) = \dfrac{1}{|3x+2|}$ este continuă, deci mărginită: $g(x) \in \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right]$, dacă $x \in [0,2]$.

f) determinăm pe δ_ε , punînd condiția ca expresia la care am ajuns (și care nu mai depinde de x , ci doar de δ_ε) să fie mai mică decît ε :

$$\delta_\varepsilon \frac{1}{2} < \varepsilon \Rightarrow \delta_\varepsilon < 2\varepsilon$$

Orice δ_ε care îndeplinește această condiție este convenabil. Putem de exemplu alege $\delta_\varepsilon = \frac{3}{2}\varepsilon$ sau $\delta_\varepsilon = \varepsilon$ etc.

Pentru a putea folosi și majorarea făcută funcției g , trebuie să avem și $\delta_\varepsilon \le 1$, deci de fapt $\delta_\varepsilon = \min(1, \frac{3}{2}\varepsilon)$ (de exempul).

Rezultă:

$$| f(x)-l | = \frac{|x-1|}{|3x+2|} < \frac{\delta_\varepsilon}{|3x+2|} < \frac{\delta_\varepsilon}{2} = \min(1, \frac{3}{2}\varepsilon) < \varepsilon$$

3. a) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{x+2} = 2 \iff$

$$\iff \left[\forall\, \varepsilon>0 \;\; \exists\, \delta_\varepsilon>0 \;\; \forall\, x\neq 2, \;\; |x-2| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \right.$$

$$\left. \Rightarrow \left| \sqrt{x+2} - 2 \right| < \varepsilon \right]$$

b) fie $\varepsilon > 0$; căutăm pe δ_ε

c) $\left| \sqrt{x+2} - 2 \right| = \dfrac{|x-2|}{\left| \sqrt{x+2} + 2 \right|}$

d) $\dfrac{|x-2|}{\sqrt{x+2}+2} < \dfrac{\delta_\varepsilon}{\sqrt{x+2}+2}$

e) $\dfrac{\delta_\varepsilon}{\sqrt{x+2}+2} = \delta_\varepsilon \dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2} < \delta_\varepsilon \dfrac{1}{3}$, deoarece în

intervalul [1,3] de exemplu, funcţia $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}$ este

mărginită între $\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}$ şi $\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}$

f) determinăm pe δ_ε din condiţia: $\dfrac{\delta_\varepsilon}{3} < \varepsilon$.

Obţinem $\delta_\varepsilon < 3\varepsilon$, deci putem lua de exemplu $\delta_\varepsilon = \varepsilon$. Dar pentru a fi valabilă şi majorarea care am făcut-o funcţiei g trebuie să avem şi $\delta_\varepsilon \le 1$, deci de fapt $\delta_\varepsilon = \min(1,\varepsilon)$.

Rezultă:

$$\frac{|x+2|}{\sqrt{x+2}+2} < \frac{\delta_\varepsilon}{\sqrt{x+2}+2} < \frac{\delta_\varepsilon}{3} = \frac{\min(1\ ,\ \varepsilon)}{3} < \varepsilon$$

deci condiţia din definiţia limitei este şi în acest caz îndeplinită.

4) a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = \infty \iff$

$\iff \left[\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \delta_\varepsilon > 0\ \ \forall\ x \neq 1,\ \ |x-1| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \right.$

$\left. \Rightarrow \dfrac{1}{(x-1)^2} > \varepsilon \right]$

b) fie ε oarecare (nu neapărat pozitiv deoarece $l = +\infty$, deci $V_l = (\varepsilon\ ,\ +\infty)$ are sens pentru orice ε , nu numai pentru ε pozitiv).

c) $\dfrac{1}{(x-1)^2} = \dfrac{1}{|x-1|^2}$

d) $\dfrac{1}{|x - 1|^2} < \dfrac{1}{\delta_\varepsilon^2}$ (deoarece se au în vedere doar acei x, pentru care $|x - 1| < \delta_\varepsilon$).

f) $\dfrac{1}{\delta_\varepsilon^2} > \varepsilon \Rightarrow \delta_\varepsilon^2 < \dfrac{1}{\varepsilon}$, deci putem lua $\delta_\varepsilon = \dfrac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}$

Atunci:

$$\frac{1}{(x - 1)^2} = \frac{1}{|x - 1|^2} > \frac{1}{\delta_\varepsilon^2} = \frac{1}{\frac{1}{4\varepsilon}} = 4\varepsilon > \varepsilon$$

II. Utilizând definiția, să se arate că:

1. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x + 1}{2x - 1} = \dfrac{3}{2}$ 2. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 1}{x - 100} = \infty$

Răspunsuri:

1. a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x + 1}{2x - 1} = \dfrac{3}{2} \iff$

$\iff \left[\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta_\varepsilon \;\; \forall x > \delta_\varepsilon \Rightarrow \left| \dfrac{3x + 1}{2x - 1} - \dfrac{3}{2} \right| < \varepsilon \right]$

b) fie $\varepsilon > 0$ oarecare; căutăm pe δ_ε.

c) deoarece x_0 nu mai este finit, nu mai putem pune în evidență $|x - x_0|$. Vom proceda altfel: considerăm inegalitatea $|f(x) - l| < \varepsilon$ ca inecuație în necunoscuta x (utilizând și faptul că $x \to \infty$, deci putem considera $|2x + 1| = 2x + 1$).

Avem:

$$|f(x) - l| < \varepsilon \iff \left| \frac{3x + 1}{2x - 1} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon \iff$$

$$\iff \frac{1}{2|2x + 1|} < \varepsilon \iff \frac{1}{2(2x + 1)} < \varepsilon \;\; \left[\text{pentru } x > -\frac{1}{2} \right]$$

$$\iff 2x + 1 > \frac{1}{2\varepsilon} \iff x > \frac{1 - 2\varepsilon}{4\varepsilon}$$

Deci pentru $\delta_\varepsilon = \max\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1 - 2\varepsilon}{4\varepsilon}\right)$ și $x > \delta_\varepsilon$, avem:

$$\left| \frac{3x + 1}{2x - 1} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon .$$

2. a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 1}{x - 100} = \infty \iff$

$\iff \left[\forall \varepsilon \ \exists \delta_\varepsilon \ \forall x > \delta_\varepsilon \ \dfrac{x^2 + 1}{x - 100} > 100 \right]$

b) fie ε oarecare; determinăm pe δ_ε .

c) exprimăm pe x din inegalitatea $f(x) > \varepsilon$:

$\dfrac{x^2 + 1}{x - 100} > \varepsilon \iff$ (putem presupune $x > 100$ pentru că $x \longrightarrow \infty$) $\iff x^2 + 1 - \varepsilon x + 100\varepsilon > 0$. Dacă x_1 şi x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei de gradul doi ataşate şi presupunem $x_1 < x_2$, avem $f(x) > \varepsilon \iff x > \max(100 , x_2)$.

Deci putem lua $\delta_\varepsilon = \max(100 , x_2)$.

LIMITE DE ŞIRURI

Definiţia limitei unui şir se deduce din definiţia limitei unei funcţii făcând particularizările menţionate:

(1) x se inlocuieşte cu n

(2) f(x) se inlocuieşte cu a_n

(3) x_0 se inlocuieşte cu n_0

In plus trebuie observat că nu are sens $n_0 = -\infty$ şi nici n_0 finit (de exemplu, nu are sens $n \longrightarrow 3$, căci n fiind număr natural, nu se poate apropia oricît de mult de 3).

Aşadar, din cele nouă forme ale limitei unei funcţii se particularizează doar trei: cele corespunzătoare lui $x_0 = + \infty$.

Avem deci:

(l_{10}) l - finit (se transpune definiția (l_2))

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \iff \left[\forall\, \varepsilon>0 \;\; \exists\, \delta_\varepsilon \;\; \forall\, n>\delta_\varepsilon \;\; |a_n - l| < \varepsilon\right]$$

Deoarece în inegalitatea $n > \delta_\varepsilon$ n este număr natural, putem considera și pe δ_ε număr natural. Pentru a sublinia acest lucru vom scrie n_ε în loc de δ_ε. Avem deci:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \iff \left[\forall\, \varepsilon>0 \;\; \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n>n_\varepsilon \;\Rightarrow\; |a_n - l| < \varepsilon\right]$$

(l_{11}) $l = +\infty$ (se transpune definiția (l_5))

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \iff \left[\forall\, \varepsilon>0 \;\; \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n>n_\varepsilon \;\Rightarrow\; a_n > \varepsilon\right]$$

(l_{12}) $l = -\infty$ (se transpune definiția (l_8))

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \iff \left[\forall \varepsilon \;\; \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n>n_\varepsilon \;\Rightarrow\; a_n < \varepsilon\right]$$

EXEMPLE:

I. Utilizând definiția, arătați că:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-1}{3n+1} = 1$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2+n+1} = 0$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{2^n+3} = 0$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n+1} = \infty$

RASPUNSURI:

1. Adaptăm etapele corespunzătoare pentru limite de funcții, în cazul $x_0 = +\infty$.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-1}{3n+1} = 1 \iff \left[\forall\, \varepsilon>0 \;\; \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n>n_\varepsilon \;\; \left|\dfrac{3n-1}{3n+1} - 1\right| < \varepsilon\right]$

b) fie $\varepsilon > 0$ oarecare; determinăm pe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$.

c) considerăm inegalitatea: $|a_n - l| < \varepsilon$ ca inecuație cu necunoscuta n :

$$\left|\frac{3n-1}{3n+1} - 1\right| < \varepsilon \iff \frac{2}{3n+1} < \varepsilon \iff n > \frac{\frac{2}{\varepsilon} - 1}{3}$$

deci $n_\varepsilon = \left[\dfrac{2-\varepsilon}{3\varepsilon} \right] + 1$

2. a) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n^2+n+1} = 0 \iff$

$\iff \left[\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \forall n > n_\varepsilon \ \left| \dfrac{1}{n^2+n+1} \right| < \varepsilon \right]$

b) fie $\varepsilon > 0$ oarecare; determinăm pe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel:

c) $\dfrac{1}{n^2+n+1} < \varepsilon \iff \varepsilon n^2 + \varepsilon n + \varepsilon - 1 > 0$; Fie n_1 şi n_2 soluţiile acestei ecuaţii de gradul doi ($n_1 < n_2$). Atunci pentru $n > n_2$ avem satisfăcută inegalitatea considerată .

Deci $n_\varepsilon = [n_2] + 1$.

METODE PENTRU CALCULUL LIMITELOR DE FUNCŢII ŞI DE ŞIRURI

Iată acum cele mai frecvente metode de calcul a limitelor de şiruri şi de funcţii, la nivelul manualelor de liceu.

METODE COMUNE PENTRU ŞIRURI ŞI PENTRU FUNCŢII

1. DEFINITIA. În capitolul unu am arătat cum se foloseşte **definiţia** pentru demonstrarea limitelor, atit pentru şiruri, cât şi pentru funcţii. Completăm cele spuse cu următorul set de exerciţii:

I. Cu ajutorul definiției, studiați dacă există limita următoarelor șiruri și funcții:

1. $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2 - 100}}{n}$ 4. $f(x) = \sqrt{x}$ - în $x_o = 2$ și $x_o = a$

2. $a_n = \sqrt{n^2 - 100}$ 5. $f(x) = \cos x$ - în $x_o = \dfrac{\pi}{2}$ și $x_o = a$

3. $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2 - 100}}{700 - n}$ 6. $f(x) = 5^{x^2+1}$ - în $x_o = 1$ și $x_o = a$

2. DAREA FACTORULUI COMUN FORȚAT. Metoda se utilizează adesea pentru înlăturarea nedeterminărilor de forma $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $\dfrac{0}{0}$. Prin scoaterea factorului comun foțat se urmărește obținerea a cât mai multe expresii ce tind la zero. Pentru aceasta se utilizează frecvent următoarele trei limite:

$$(1) \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^{\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{dacă } \alpha > 0 \\ 1 & \text{dacă } \alpha = 0 \\ \infty & \text{dacă } \alpha < 0 \end{cases}$$

$$(2) \quad \lim_{x \to \infty} x^{\alpha} = \begin{cases} \infty & \text{dacă } \alpha > 0 \\ 1 & \text{dacă } \alpha = 0 \\ 0 & \text{dacă } \alpha < 0 \end{cases}$$

$$(3) \quad \lim_{n \to \infty} x^{n} = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \in (-1\,,\,1) \\ 1 & \text{dacă } x = 1 \\ \infty & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$$

Pentru a avea expresii ce tind la zero se urmărește așadar:

- obținerea a cât mai mulți termeni de forma x^{α}, cu $\alpha<0$, dacă $x \longrightarrow \infty$.

- obținerea a cât mai mulți termeni de forma x^{α}, cu $\alpha>0$, dacă $x \longrightarrow 0$.

EXEMPLE:

I. Să se calculeze:

1. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 - x + 2}{x^2 + x + 5}$

2. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{7^{n+3} + 9^n}{7^{n+2} - 9^{n+1}}$

3. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2^n + 2\cdot 3^n + 3\cdot 5^n}{3^n + 3\cdot 4^n + 4\cdot 5^n}$

4. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2^n + 3^n + x^n}{3^n + 4^n}$, $x>0$

5. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2\cdot a^n + b^n}{3\cdot a^n + 4\cdot b^n}$

6. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(n + 2)! - (n + 1)!}{(n + 2)! + (n + 1)!}$

7. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sqrt{n^3 - 2\cdot n^2 - 2} + \sqrt[3]{n^4 + 1}}{\sqrt[4]{n^6 + 6\cdot n^5 + 2} + \sqrt[5]{n^7 + 3\cdot n^3 + 1}}$

8. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{\sqrt{x + 2\cdot\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{2x - \sqrt{x}}}$

9. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln(x^2 + x + 1)}{\ln(x^{10} + x + 2)}$

10. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{\sqrt[m]{x + 3\cdot\sqrt[n]{x}}}{\sqrt[n]{3x + \sqrt[m]{x}}}$

11. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(x + 1)\cdot \ldots \cdot(x^n + 1)}{\left[(nx)^n + 1\right]^{\frac{n+1}{2}}}$

12. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln|x|}{1 + \ln|x|}$

13. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln(x + e^x)}{\ln(x^2 + e^{2x})}$

RASPUNSURI :

2. Dând factor comun pe 9^n obținem termeni de forma x^n, cu x subunitar.

9. $$\frac{\ln(x^2 + x + 1)}{\ln(x^{10} + x + 2)} = \frac{\ln x^2\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{\ln x^{10}\left(1 + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{10}}\right)} =$$

$$= \frac{2\ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{10\ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{10}}\right)},$$ expresie care tinde la $\frac{1}{5}$ când x tinde la infinit.

II. Să se traseze graficele funcțiilor:

1. $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2^n}{2^n + x^n}$, $x > 0$

2. $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x^{2n+2}}{2^{2n} + x^{2n}}$

3. $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1 + x + \ldots + x^n}{1 + x^n}$

4. $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{1 + x^n}$, $x > -1$

5. $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\ln(2^n + x^n)}{n}$

6. $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} (x - 1) \cdot \operatorname{arctg} x^n$

7. $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x^{n+1} - 2 \cdot \ln^{n+1} x}{x^n + 3 \cdot \ln^n x}$

8. Pentru orice funcţie raţională, nenulă, R, cu coeficienţi reali, avem:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{R(x)}{R(x+1)} = 1 \qquad \text{(Manual cls XII)}$$

3. *AMPLIFICAREA CU CONJUGATA.* Se utilizează pentru înlăturarea nedeterminărilor ce conţin radicali. Dacă nedeterminarea provine de la o expresie de forma:

$$\sqrt[p]{u(x)} - \sqrt[p]{v(x)}$$

atunci amplificăm cu:

$$\sqrt[p]{u^{p-1}(x)} + \sqrt{u^{p-2}(x) \cdot v(x)} + \ldots + \sqrt{v^{p-1}(x)} \qquad (3.1)$$

în scopul eliminării radicalilor din expresia iniţială. Suma din (3.1) se numeşte conjugata de ordin p.

Dacă nedeterminarea este dată de o expresie de forma:

$$\sqrt[p]{u(x)} + \sqrt[p]{v(x)}$$

cu p - număr impar, conjugata este:

$$\sqrt[p]{u^{p-1}(x)} - \sqrt[p]{u^{p-2}(x) \cdot v(x)} + \ldots + \sqrt[p]{v^{p-1}(x)} \ .$$

Un exemplu de aplicare a acestei formule este exercițiul 5 de mai jos.

EXERCITII:

1. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1} - \sqrt[3]{x^3-x^2+1} \right)$

2. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-2x+3}}{x-3}$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1+x} - \sqrt[n]{1-x}}{x}$

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+x} + \sqrt{1-x}}{x}$

5. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}$

6. $\lim\limits_{n \to \infty} n^{\frac{m-p}{mp}} \dfrac{\sqrt[m]{n+1} - \sqrt[m]{n-1}}{\sqrt[p]{n+1} - \sqrt[p]{n-1}}$

7. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(a_0\sqrt[3]{n} + a_1\sqrt[3]{n+1} + \ldots + a_k\sqrt[3]{n+k} \right)$, cu $a_0 + a_1 + \ldots + a_k = 0$

RASPUNSURI:

7. Se înlocuiește de exemplu $a_0 = -a_1 - a_2 - \ldots - a_k$, în șirul dat și se calculează k limite de forma:

$$\lim_{n \to \infty} a_i \left(\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{n+i} \right)$$

4. UTILIZAREA LIMITELOR FUNDAMENTALE. În cele ce urmează vom numi limite fundamentale următoarele limite:

$$\text{(a)} \qquad \lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$

(b) $$\lim_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$$

(c) $$\lim_{\alpha \to 0} \frac{a^{\alpha} - 1}{\alpha} = \ln a$$

Observatie:

Din (a) se deduce:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\arcsin \alpha}{\alpha} = 1 \; ; \; \lim_{\alpha \to 0} \frac{\mathrm{tg}\, \alpha}{\alpha} = 1 \; ; \; \lim_{\alpha \to 0} \frac{\mathrm{arctg}\, \alpha}{\alpha} = 1$$

Din (b) se deduce:

$$\lim_{\alpha \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right)^{\alpha} = e$$

Din (c) se deduce:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\ln(1 + \alpha)}{\alpha} = 1 \; ; \; \lim_{\alpha \to \alpha_0} \frac{a^{\alpha} - a^{\alpha_0}}{\alpha - \alpha_0} = a^{\alpha} \cdot \ln a$$

EXERCITII:

I. Să se calculeze:

1. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 7x}$

2. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

3. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos kx}{x^2}$

4. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x^2}$

5. $\lim_{x \to \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 8x}$

6. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \mathrm{tg}\, x}{x^2 \mathrm{tg}\, x}$

7. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x}{x^2}$

8. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x \cdot \ldots \cdot \cos nx}{x^2}$

9. $\lim_{x \to 1} \frac{\cos \pi x + 1}{(x - 1)^2}$

10. $\lim_{x \to \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx}$

11. $\lim_{x \to 0} \frac{x^m - \sin^n x}{x^{n+2}}$ pentru diferite valori ale lui $n \in \mathbb{N}$

12 $\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x - \mathrm{arctg}\, x}{x^3}$

13. $\lim_{x \to n\pi} \frac{\arcsin (\mathrm{tg}\, x)}{\mathrm{arctg}\, (\sin x)}$

13 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x) - \ln(1 - x)}{\operatorname{arctg}(1 + x) - \operatorname{arctg}(1 - x)}$

RASPUNSURI :

12. Notând $\alpha = \arcsin x - \operatorname{arctg} x$, observăm că α tinde la zero când x tinde la zero, deci urmărim să obținem $\dfrac{\alpha}{\sin \alpha}$. În acest scop amplificăm cu

$\sin \alpha = \sin(\arcsin x - \operatorname{arctg} x) = \sin(\arcsin x)\cos(\operatorname{arctg} x) -$

$- \sin(\operatorname{arctg} x)\cos(\arcsin x)$.

Notând cu: $u = \arcsin x$, $v = \operatorname{arctg} x$,

rezultă $x = \sin u$, deci $\cos u = \sqrt{1 - x^2}$

$x = \operatorname{tg} v$, deci $\cos v = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$, $\sin v = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$

II. Să se calculeze:

1. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 2} \right)^{x^2}$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$

3. $\lim\limits_{n \to \infty} \operatorname{tg}^n \dfrac{\pi}{4}$

4. $\lim\limits_{\to 0} \left(1 + x^2 \right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$

5. $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{a^{x^2} + b^{x^2}}{a^x + b^x} \right]^{\frac{1}{x}}$

6. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\ln(1 + 3^x)}{\ln(1 + 2^x)}$

7. $\lim\limits_{x \to e} \left[\ln x \right]^{\frac{1}{x^2 - 3ex + 2e^2}}$

8. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3^{3n}}{\left(3 + \frac{1}{n} \right)^{3n}}$

RASPUNSURI :

6. În limitele în care apar nedeterminări cu logaritmi, se urmărește permutarea limitei cu logaritmul:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\ln(1+2^x)}\cdot\ln(1+3^x) = \lim_{x\to-\infty} \ln\left(1+3^x\right)^{\frac{1}{\ln(1+2^x)}} =$$

$$= \ln \lim_{x\to-\infty}\left(1+3^x\right)^{\frac{1}{\ln(1+2^x)}} =$$

$$= \ln \lim_{x\to-\infty}\left[\left(1+3^x\right)^{\frac{1}{3^x}}\right]^{\frac{1}{\ln(1+2^x)}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{3^x}{\ln(1+2^x)} =$$

$$= \text{(permutăm din nou limita cu logaritmul)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{3^x}\cdot\ln(1+2^x)} =$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(1+2^x\right)^{\frac{1}{3^x}}} = \frac{1}{\ln\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+2^x\right)^{\frac{1}{3^x}}} =$$

$$= \frac{1}{\ln\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(1+2^x\right)^{\frac{1}{2^x}}\right]^{\frac{2^x}{3^x}}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

III. Să se calculeze:

1. $\lim\limits_{x\to a}\frac{a^x - a^a}{x-a}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^{\operatorname{tg} x}-1}{x}$

3. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\frac{9^{\sin x}-3^{\sqrt{2}}}{x-\frac{\pi}{4}}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{2}-1\right)$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\cos\frac{1}{n}-1\right)$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\arcsin\frac{1}{n}$

7. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[3]{\cos\frac{1}{n}}-1\right)$

8. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$

9. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\ldots+\sqrt[n]{a_p}-p\right)$

RASPUNSURI:

1. $\lim\limits_{x \to a} \frac{a^x - a^a}{x - a} = \lim\limits_{x \to a} \frac{a^a(a^{x-a} - 1)}{x - a}$ şi notând $x - a = \alpha$,

obţinem: $l = a^a \lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{a^\alpha - 1}{\alpha} = a^a \ln a$.

4. Considerăm funcţia: $f(x) = x\left(2^{\frac{1}{x}} - 1\right)$ obţinută din a_n

prin înlocuirea lui n cu x. Calculăm: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} =$

$= \ln 2$.

Conform criteriului cu şiruri (vezi metoda 10 punctul c), avem de asemenea: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \ln 2$.

5. CEVA MARGINIT INMULTIT CU CEVA CARE TINDE LA ZERO, TINDE LA ZERO. (A) Dacă $(a_n)_{n\in N}$ este mărginit şi $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = 0$, atunci:

$$\lim_{n \to \infty} a_n \cdot b_n = 0$$

(B) Dacă f este mărginită într-o vecinătate a lui x_0 şi $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, atunci $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$.

EXEMPLE:

1. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ pentru că $(-1)^n$ este mărginit între -1 şi 1. iar $\frac{1}{n}$ tinde la zero;

2. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} = 0$ pentru că $1 - \cos x$ este mărginită între 0 şi 2, iar $\frac{1}{x^2}$ tinde la zero;

3. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$;

4. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\alpha_n}{n}$, unde α_n este a n-a zecimală a numărului π;

5. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\beta_n}{2n^2 + 1}$, unde β_n este aproximaţia cu n zecimale exacte a numărului e;

6. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2^n + (-2)^n}{n - 2^n}$;

7. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\mathrm{sgn}(\, n^2 - 3n + 2\,)}{e^{n+1}}$;

8. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sin(\, n^2 + 3n + 5\,)}{n^2 + 3n + 5}$;

9. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a \cdot \mathrm{ctg}(n \cdot x)}{nx^2 + 2}$;

10. $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \mathrm{arctg}\, \dfrac{1}{x}$;

11. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n \cdot \sin(n!)}{n^2 + 1}$;

12. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x - [x]}{x}$;

13. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(-1)^{[x]} \cdot \sin(x^2)}{x}$;

Indicaţii:

4. $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este mărginit între 0 şi 9, fiind format din cifre;

5. $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este mărginit între 2 şi 3;

6. METODA MAJORĂRII ŞI MINORĂRII. (A) Dacă există funcţiile g şi h astfel încît într-o vecinătate a lui x_0 să avem:

$$g(x) \le f(x) \le h(x) \qquad \text{şi}$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l$$

atunci $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

Schematic:

$$\begin{array}{ccccc} g(x) & \le & f(x) & \le & h(x) \\ \downarrow & & \Downarrow & & \downarrow \\ \longrightarrow & & l & & \longleftarrow \end{array}$$

(B) Dacă există şirurile $(b_n)_{n\in N}$ şi $(c_n)_{n\in N}$ astfel incât:

$b_n \le a_n \le c_n$ incepând de la un rang n_0 şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = l$

atunci: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = l$.

Schematic:

$$\begin{array}{ccccc} b_n & \le & a_n & \le & c_n \\ \downarrow & & \Downarrow & & \downarrow \\ \longrightarrow & & l & & \longleftarrow \end{array}$$

Observaţie:

Dacă $l = +\infty$, se poate renunţa la h $\left(\text{respectiv la } (c_n)_{n\in N} \right)$,

iar dacă $l = -\infty$, se poate renunţa la g $\left(\text{respectiv la } (b_n)_{n\in N} \right)$.

Această metodă este mai greu de aplicat, datorita majorărilor şi minorărilor pe care le presupune. Acestea trebuie să ducă la expresii cit mai puţin diferite de forma iniţială pentru a nu modifica limita.

Amintim citeva procedee, dintre cele mai frecvent intâlnite, pentru obţinerea şirurilor $(b_n)_{n\in N}$ şi $(c_n)_{n\in N}$:

1. Punem in loc de toţi termenii şirului $(a_n)_{n\in N}$ pe cel mai mic dintre ei (pe cel mai mare).

Exemple:

a) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

b) $a_n = \frac{1}{\sqrt[p]{n^p+1}} + \frac{1}{\sqrt[p]{n^p+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[p]{n^p+n}}$

Raspunsuri:

a) în suma care exprimă şirul $(a_n)_{n\in N}$ există un cel mai mic termen, $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$, şi un cel mai mare termen, $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$. Aplicînd procedeul 1., avem:

$$a_n \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \longrightarrow 1$$

$$a_n \ge \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \longrightarrow 1$$

deci $a_n \longrightarrow 1$.

2. Minorăm (majorăm) termenii ce formează şirul a_n cu aceeaşi cantitate.

Exemple:

a) $a_n = \frac{\sin 1}{n^2+1} + \frac{\sin 2}{n^2+2} + \dots + \frac{\sin n}{n^2+n}$

b) $a_n = \frac{\sin x}{n^2+1} + \frac{\sin 2x}{n^2+2} + \dots + \frac{\sin nx}{n^2+n}$

Raspunsuri:

a) De data aceasta nu există un cel mai mic (cel mai mare) termen în suma ce formează şirul a_n. Aceasta datorită faptului că funcţia $f(x) = \sin x$ nu este monotonă. Ţinând cont că avem: $-1 \le \sin x \le 1$, putem majora înlocuind peste tot sin x cu 1.Obţinem:

$$a_n \le \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+1} + \dots + \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{n^2+1} \longrightarrow 0$$

Analog,putem minora înlocuind peste tot sin x cu -1,apoi aplicând primul procedeu rezultă:

$$a_n \geq \frac{-1}{n^2+n} + \frac{-1}{n^2+n} + \dots + \frac{-1}{n^2+n} = \frac{-n}{n^2+n} \longrightarrow 0$$

deci $a_n \longrightarrow 0$.

3. Minorăm (majorăm) renunțând la unii termeni ce formează şirul a_n .

Exemple:

a) $a_n = \sqrt[n]{1^p + 2^p + \dots + n^p}$

b) $a_n = \sqrt[n]{1^n + 2^n + \dots + n^n}$

Raspunsuri:

b) $a_n \geq \sqrt[n]{n^n} = n \longrightarrow \infty$, deci $a_n \longrightarrow \infty$

EXERCITII:

I. Să se calculeze limitele şirurilor:

1. $a_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right]$

2. $a_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\sqrt{1 + \frac{k^2}{n^3}} - 1 \right]$

3. $a_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{tg} \frac{2k}{n^2}$

4. $a_n = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_k^2}$, cu $1 < b_1 < b_2 < \dots < b_k$

5. $a_n = \sqrt{b_1^n + b_2^n + \dots + b_k^n}$, cu $b_i > 0$, $i \in \overline{1,k}$

Raspunsuri:

1. $$\sum_{k=1}^{n} \left[\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} \right] = \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n^2}}{\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}}} =$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}$$. Majorăm utilizînd cel mai mic şi cel mai mare numitor. Obţinem astfel numitori comuni pentru sumă.

3. $$\operatorname{tg}\frac{2k}{n^2} = \frac{\sin\frac{2k}{n^2}}{\cos\frac{2k}{n^2}}$$ şi se fac minorări şi majorări utilizând cel mai mare şi cel mai mic numitor.

7. *EXERCITII IN CARE APARE PARTEA INTREAGA.* Cele mai întâlnite metode pentru rezolvarea lor sunt:

(A) Metoda majorării şi minorării utilizând dubla inegalitate:

$$a - 1 < [\, a \,] \le a \qquad (3.2)$$

cu ajutorul căreia se încadrează funcţia (şirul) a cărei limită trebuie calculată între două funcţii (şiruri) care nu mai conţin partea îtreagă.

Utilizând acest procedeu când este vorba de funcţii, de cele mai multe ori limita nu se obţine direct, ci cu ajutorul limitelor laterale.

Exemplu. pentru calculul limitei: $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2+2x}{7}\left[\frac{5}{x^2-x-6}\right]$

procedăm astfel:

(a) Utilizăm inegalităţile (3.2) pentru a obţine expresii ce nu conţin partea întregă:

$$\frac{5}{x^2-x-6} - 1 < \left[\frac{5}{x^2-x-6}\right] \le \frac{5}{x^2-x-6}$$

(b) Pentru a obţine funcţia a cărei limită se cere, amplificăm inegalităţile precedente cu $\frac{x^2+2x}{7}$, ţinând cont că:

– la stânga lui –2 avem: $\frac{x^2+2x}{7} > 0$, deci:

$$\frac{x^2+2x}{7}\left[\frac{5}{x^2-x-6}-1\right] < \frac{x^2+2x}{7}\left[\frac{5}{x^2-x-6}\right] <$$

$$< \frac{x^2+2x}{7}\cdot\frac{5}{x^2-x-6}$$

- la dreapta lui -2 avem: $\frac{x^2+2x}{7} < 0$, deci:

$$\frac{x^2+2x}{7}\left[\frac{5}{x^2-x-6}-1\right] > \frac{x^2+2x}{7}\left[\frac{5}{x^2-x-6}\right] >$$

$$> \frac{x^2+2x}{7}\cdot\frac{5}{x^2-x-6}$$

- (c) Trecând la limită în aceste inegalităţi (metoda majorării şi minorării), obţinem limita la stânga: $l_s(-2) = \frac{2}{7}$ şi limita la dreapta: $l_d(-2) = \frac{2}{7}$, deci $l = \frac{2}{7}$.

(B) Dacă nu se poate utiliza dubla inegalitate (3.2), pentru $\lim_{x\to n} f(x)$, cu $n \in Z$, se calculează direct limitele laterale, ţinând cont de faptul că:

- dacă $x \longrightarrow n$ cu $x < n$, atunci $[x] = n - 1$.
- dacă $x \longrightarrow n$ cu $x > n$, atunci $[x] = n$.

Exemplu. Pentru $\lim_{n\to\infty} (-1^{[x]})/(x-1)$ nu putem folosi (3.2) deoarece expresiile ce se obţin pentru calculul limitelor laterale nu au aceeaşi limită. De aceea utilizăm faptul că la stânga lui 1 avem $[x] = 0$, iar la dreapta lui 1 avem $[x] = 1$, deci:

$$l_s(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{(-1)^{[x]}}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

$$l_d(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{(-1)^{[x]}}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{-1}{x-1} = -\infty$$

Rezultă $l = -\infty$

(C) Dacă $x \longrightarrow \infty$ putem inlocui $[x]$ ţinând cont că pentru $x \in [m,m+1)$, avem: $[x] = m$ (evident, $x \longrightarrow \infty$ implică $m \longrightarrow \infty$).

Exemplu: $\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{[x]+(-1)^{[x]}}\right]^{[x]+(-1)^{[x]}}$

Variabila x care tinde la infinit este sigur între două numere întregi consecutive: $m \le x \le m + 1$, deci:

$$\left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{m-1} \le \left(1 + \frac{1}{[x]+(-1)^{[x]}}\right)^{[x]+(-1)^{[x]}} <$$

$$\le \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{m+1} \quad \text{și}$$

$$\lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{m} = \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1} = e$$

EXERCIȚII:

I. 1. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 5x - 6}{4}\left[\frac{8}{x^2 - 8x + 15}\right]$

2. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 - 9x + 8}{x^2 + x + 1}\left[\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 12x + 32}\right]$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \left[\frac{5}{\sin x}\right] \cdot \operatorname{tg} x$

4. $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \left[\frac{3\sin x + \cos x}{\sin x}\right]$

5. $\lim\limits_{x \to 0} \left[\frac{5x + 3}{\sin 2x}\right] \cdot \operatorname{tg} \frac{3x}{2}$

6. $\lim\limits_{x \to 0} x^2\left[\frac{1}{x^2}\right]$

II. 1. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{[x] + [2^2x] + \dots + [n^2x]}{n^3}$

2. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{[x] + [3^2x] + [5^2x] + \dots + [(2n-1)^2x]}{n^3}$

3. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{[x] + [2^kx] + \dots + [n^kx]}{n^{k+1}}$

4. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{[x]\cdot 1! + [2x]\cdot 2! + \dots + [nx]\cdot n!}{(n + 1)!}$

8. *UTILIZAREA DEFINITIEI DERIVATEI.* După cum se ştie, derivata unei funcţii este:

$$g'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o} \qquad (3.3)$$

dacă această limită există şi este finită. Ea poate fi utilizată la

(A) înlăturarea nedeterminărilor $\frac{0}{0}$ pentru limite de funcţii ce pot fi scrise sub forma:

$$\lim_{x \to x_o} \frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o},$$

x_o fiind un punct în care g este derivabilă.

Exemplu. $\lim_{x \to a} \frac{a^x - a^a}{x - a}$. Observăm că notând $g(x) = a^x$, avem $g(a) = a^a$ şi limita devine:

$\lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$. Această limită are valoarea $g'(a)$ deoarece g este o funcţie derivabilă în a.

Am redus astfel calculul limitei date la calculul valorii $g'(a)$, calcul ce se poate face derivând pe g :

$g'(x) = a^x \ln a$, deci $g'(a) = a^a \ln a = l$.

Observatie: această metodă poate fi utlizată astfel: "fie $g(x) = a^x$. Avem $g'(x) = a^x \ln a$, $g'(a) = a^a \ln a = l$. Nu recomandăm însă la examen acest mod sintetic de redactare a rezolvării deoaece el poate induce în eroare pe examinatori. De aceea detalirea: "Observăm că notîd $g(x) = \ldots$, avem $g(a) = \ldots$ şi limta devine .... $= g'(a)$ deoarece g este derivabilă în a .... " este mult mai indicată.

(B) Calculul limitelor de şiruri, prin intermediul unor funcţii ataşate. Funcţia ataşată şirului, de data aceasta, nu se obţine prin înlocuirea lui n cu x, în expresia lui a_n deoarece pentru $x \longrightarrow \infty$ nu putem calcula derivata,ci prin înlocuirea lui n cu $\frac{1}{x}$ (ceea ce duce la calculul derivatei în zero).

Exemplu. Pentru $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{2}-1)$, considerăm funcţia

$f(x) = \dfrac{2^x - 1}{x}$ obţinută prin înlocuirea lui n cu $\dfrac{1}{x}$ în expresia lui a_n. Calculăm $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Pentru aceasta observăm că notînd $g(x) = 2^x$ avem $g(0) = 1$ şi limita devine: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} =$ $= g'(0)$ deoarece g este o funcţie derivabilă în zero. Avem: $g'(x) = 2^x \ln 2$, deci $g'(0) = \ln 2$. Atunci conform criteriului cu şiruri obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ln 2$.

EXERCIŢII:

I. 1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$

3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1}$

4. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x - \frac{\pi}{4}}$

5. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4}}{x - 1}$

6. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{9^{\sin^2 x} - 3}{x - \frac{\pi}{4}}$

7. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\cos x + 1}{x - \pi}$

8. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x \cdot \cos x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{4}}$

II. Pentru $a > 0$ să se calculeze:

1. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^{x^x} - a^{a^a}}{x - a}$

2. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^{x^x} - a^{x^a}}{x - a}$

3. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^{\operatorname{tg} x} - x^{\operatorname{tg} a}}{x - a}$

4. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^{\operatorname{tg} x} - x^{\operatorname{tg} a}}{\sin bx - \sin ba}$, $a \neq \dfrac{k\pi}{2}$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a^x + b^x + c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^{x^2} - b^{x^2}}{(a^x - b^x)^2}$

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_b x - \log_a x}{x - a}$

Raspuns:

4. Împărţim şi numărătorul şi numitorul cu $x - a$.

III. Să se arate că nu putem utiliza definiţia derivatei pentru calculul limitelor:

1. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{\sqrt{x} - \cos x - 1}{x}$ 2. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{1}{x^2 - 1} \cdot \ln \dfrac{2 \cdot \arcsin x}{\pi}$

IV. 1. $\lim\limits_{n \to \infty} n\left(\sqrt[n]{e} - 1 \right)$ 2. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sqrt[n]{2} - 1}{\sqrt[n]{3} - 1}$

3. $\lim\limits_{n \to \infty} n\left(\sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} - 2 \right)$

4. $\lim\limits_{n \to \infty} n\left(\sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} + \ldots + \sqrt[n]{a_k} - k \right)$

5. $\lim\limits_{n \to \infty} \left[\dfrac{\sqrt[n]{a_1} - \sqrt[n]{a_2}}{2} \right]^n$, cu $a_1, a_2 > 0$

6. $\lim\limits_{n \to \infty} \left[\dfrac{\sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} + \ldots + \sqrt[n]{a_k}}{k} \right]^n$, cu $a_1, a_2, \ldots, a_k > 0$

7. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n\left(\sqrt[n]{n} - 1 \right)}{\ln n}$

Raspunsuri:

2. Considerăm funcţia: $f(x) = \dfrac{2^x - 1}{3^x - 1}$, obţinută înlocuind în expresia şirului a_n pe n cu $\dfrac{1}{x}$. Calculă $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. Pentru a utiliza definiţia derivatei, împărţim şi numărătorul şi numitorul cu x, deci:

$$f(x) = \frac{\dfrac{2^x - 1}{x}}{\dfrac{3^x - 1}{x}}$$

Observăm că notînd $g(x) = 2^x$, avem $g(0) = 1$ şi limita de la numărător devine: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = g'(x)$ deoarece g este derivabilă în zero.

$g'(x) = 2^x \ln 2$, deci conform criteriului cu şiruri $l_1 = g'(0) = \ln 2$

Analog, notînd $h(x) = 3^x$, limita de la numitor devine:

$$\lim_{x \to 0} \frac{h(x) - h(0)}{x} = h'(0) \text{ deoarece h este derivabilă în zero.}$$

$h'(x) = 3^x \ln 3$ deci, conform criteriului cu şiruri, $l_2 = h'(0) = \ln 3$, iar $l = \frac{\ln 2}{\ln 3}$.

5. Limita conţine o nedeterminare de forma 1^∞, deci aplicăm mai întîi metoda 4:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2}}{2} \right)^n = \lim_{n \to \infty} \left[1 + \frac{\sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2}}{2} - 1 \right]^n =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[\left(1 + \frac{\sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} - 2}{2} \right)^{\frac{2}{\sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} - 2}} \right]^{n \cdot \frac{\sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} - 2}{2}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n \to \infty} n \frac{\sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} - 2}{2}}$$

Considerăm acum funcţia $f(x) = \frac{1}{x}\left(a_1^x + a_2^x - 2 \right)$ obţinută înlocuind pe n cu $\frac{1}{x}$. în expresia de mai sus Calculăm $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. Pentru aceasta, observăm că notînd $g(x) = a_1^x + a_2^x$ avem $g(0) = 2$ şi limita se poate scrie: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = g'(0)$ deoarece g este derivabilă în zero.

Acum $g'(x) = a_1^x \ln a_1 + a_2^x \ln a_2$, deci $g'(0) = \ln a_1 + \ln a_2$.

Conform riteriului cu şiruri:

$$\lim_{n \to \infty} n\left(\sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} - 2 \right) = \ln(a_1 a_2)$$, iar limita inițială

este $\sqrt{a_1 \cdot a_2}$.

9. *UTILIZAREA TEOREMEI LUI L'HOSPITAL.*

__*Teorema.*__ (l'Hospital (1661 - 1704)) Dacă funcțiile f și g îndeplinesc condițiile:

1. sînt continue pe $[a,b]$ și derivabile pe $(a,b)\setminus\{ x_0 \}$
2. $f(x_0) = g(x_0) = 0$
3. g' nu se anulează într-o vecinătate a lui x_0
4. există $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha$ finit sau infinit

Atunci există $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$.

Această teoremă se poate utiliza la :

(A) Calculul limitelor de forma: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ când acestea conțin o nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$.

(B) Calculul limitelor de forma $\lim_{x \to x_0} f(x)\cdot g(x)$ când acestea conțin o nedeterminare $\infty\cdot 0$.

Această nedeterminare poate fi adusă la forma (A) astfel:

$$\lim_{x \to x_0} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \text{(nedeterminare de forma } \frac{\infty}{\infty} \text{)}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \quad \text{(nedeterminare de forma } \frac{0}{0} \text{)}$$

Observație: uneori este esențial dacă scriem nedeterminarea $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$.

Exemplu: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{-1}{x^2}}$

Dacă scriem $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{-1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{\frac{-1}{x^2}}}{x^2}$ (nedeterminare $\frac{0}{0}$)

şi derivăm, obţinem: $l = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{2}{x^3} \cdot e^{\frac{-1}{x^2}}}{2x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{\frac{-1}{x^2}}}{x^4}$ (nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$ cu gradul numitorului mai mare)

Dacă punem în evidenţă nedeterminarea $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x^2}}{e^{\frac{1}{x^2}}}$$ şi derivăm, obţinem $l = 0$.

(C) Calculul limitelor de forma $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) - g(x) \right)$, cu nedeterminare $\infty - \infty$.

Această nedeterminare poate fi adusă la forma (B) dând factor comun forţat pe $f(x)$ sau $g(x)$.

Avem, de exemplu:

$\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) - g(x) \right) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \left(1 - \frac{g(x)}{f(x)} \right)$ şi cum

$f(x) \xrightarrow{x \to x_0} \infty$ distingem două cazuri:

- dacă $\lim\limits_{x \to x_0} \left(1 - \frac{g(x)}{f(x)} \right) = a \neq 0$ (adică $\frac{g(x)}{f(x)}$ nu tinde la 1), avem: $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) - g(x) \right) = \infty \cdot a = \infty \cdot \operatorname{sgn} a = \pm \infty$.

- dacă $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, nedeterminarea este de forma (B).

(D) Calculul limitelor de forma $\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)}$, cu nedeterminări 1^{∞}, 0^{0}, ∞^{0}.

Aceste nedeterminări pot fi aduse la forma (C) utilizând formula: $A = a^{\log_a A}$ care pentru $a = e$, de exemplu, devine: $A = e^{\ln A}$, deci:

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to x_0} e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{\lim_{x \to x_0} g(x) \cdot \ln f(x)}$$

Ultima limită conține o nedeterminare de forma (C).

Pentru șiruri această metodă se aplică numai prin intermediul uneia din cele două funcții atașate șirului (obținute prin înlocuirea lui n cu x sau prin înlocuirea lui n cu $\frac{1}{x}$ în expresia lui a_n). Conform criteriului cu șiruri rezultă că limita șirului este egală cu limita funcției atașate.

Atenție: înlocuind pe n cu x calculăm limita la ∞, iar înlocuind pe n cu $\frac{1}{x}$ calculăm limita în 0.

EXERCIȚII:

I. Calculați:

1. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{ax} - e^{-2ax}}{\ln(1 + x)}$

2. $\lim_{x \to \infty} \frac{\log_a x}{x^k}$, dacă $a > 1$
(un polinom crește mai repede la infinit decât un logaritm)

3. $\lim_{x \to \infty} \frac{a^x}{x^k} = \infty$, dacă $a > 1$
(un polinom crește mai încet la infinit decât o exponențiala)

4. $\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x - 1} \right)$

5. $\lim_{x \to 0} \ln(1 + \sin^2 x) \cdot \operatorname{ctg} \ln^2(1 + x)$

6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - tg\, x}{x - \sin x}$

7. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{a^{\ln x} - x}{\ln x}$

8. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{tg\, x}$

9. $\lim\limits_{n \to \infty} n\cdot(\sqrt[n]{e} - 1)$

10. $\lim\limits_{n \to \infty} n\cdot\sin\dfrac{1}{n}$

11. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n}{e^n}$

12. $\lim\limits_{n \to \infty} \left[n + e^n \right]^{\frac{1}{n}}$

II. Arătaţi că nu se poate aplica regula lui l'Hospital pentru:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$

2. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x - \sin x}{x + \cos x}$

Raspuns:

1. Pentru $f(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$ şi $g(x) = \sin x$ avem:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{2x\cdot\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{\cos x}$$ – nu există, deci nu este îndeplinită condiţia 4. din teoremă. Totuşi limita poate fi calculată observăsd că: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x}\cdot x\cdot\sin\dfrac{1}{x} =$

$= 1\cdot 0 = 0.$

10. UTILIZAREA CRITERIULUI CU SIRURI (CRITERIUL HEINE)

Enuntul criteriului:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \iff \Big[\ \forall\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu proprietăţile:

a) $x_n \longrightarrow x_0$

b) $x_n \in D$ rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l\ \Big]$

c) $x_n \neq x_0$

Observatie: dacă $x_o = \infty$ condiţia c) nu mai are sens.

Acest criteriu nu poate fi folosit pentru înlăturarea nedeterminărilor deoarece şirul $(x_n)_{n\in N}$ din enunţ este oarecare,deci modificând şirurile,(un număr infinit de şiruri) nu putem înlătura nedeterminarea.Totuşi, criteriul poate fi folosit la :

(A) Calculul limitelor ce nu conţin nedeterminări.

Exemplu: Să se arate, utilizând criteriul cu şiruri, că:

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x+5}{2x+3} = \frac{11}{7}$$

Rezolvare: *(a)* trebuie arătat că:

$\forall (x_n)_{n\in N}$, cu proprietăţile: a) $x_n \longrightarrow 2$

b) $x_n \in \mathbb{R}\setminus\{\frac{3}{2}\}$

c) $x_n \neq 2$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \frac{11}{7}$$

(b) fie $(x_n)_{n\in N}$ un şir oarecare cu proprietăţile a),b),c)

(c) în $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$ utilizăm proprietăţile operaţiilor cu limite de şiruri pentru a pune în evidenţă $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$ (este posibil deoarece nu există nedeterminări), apoi utilizăm faptul că $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_o$:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3\cdot x_n + 5}{2\cdot x_n + 3} = \frac{\lim\limits_{n \to \infty} (3x_n + 5)}{\lim\limits_{n \to \infty} (2x_n + 3)} = \frac{3\cdot \lim\limits_{n \to \infty} x_n + 5}{2\cdot \lim\limits_{n \to \infty} x_n + 3} =$$

$$= \frac{3\cdot 2 + 5}{2\cdot 2 + 3} = \frac{11}{7}.$$

(B) Pentru a arăta că o funcţie nu are limită într-un punct. În acest scop putem proceda astfel:

1_a. găsim două şiruri: $(x_n)_{n\in N}$ şi $(y_n)_{n\in N}$ cu proprietăţile a),b),c) şi astfel încît:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) \neq \lim_{n \to \infty} f(y_n)$$

sau:

2_B. găsim un singur şir cu proprietăţile a),b),c) şi astfel încât $\lim_{n \to \infty} f(x_n)$ nu există.

Exemplu: nu există $\lim_{x \to \infty} \sin x$

1_B. fie $x_n = 2n\pi$ şi $y_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$. Avem:

a) $x_n \longrightarrow \infty$, $y_n \longrightarrow \infty$

b) $x_n, y_n \in \mathbb{R}$

şi $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} \sin 2n\pi = 0$,

$\lim_{n \to \infty} f(y_n) = \lim_{n \to \infty} \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1.$

Deci limita nu există.

2_B. fie $x_n = \frac{n\pi}{2}$. Avem:

a) $x_n \longrightarrow \infty$

b) $x_n \in \mathbb{R}$

şi $\lim_{n \to \infty} \sin \frac{n\pi}{2}$ nu există.

(C) Criteriul cu şiruri se poate utiliza în calculul limitelor de şiruri astfel:

(a) fie $f(x)$ funcţia ataşată şirului, prin inlocuirea, de exemplu, a lui n cu x in expresia lui a_n (sau a lui n cu $\frac{1}{x}$, dar atunci calculăm $\lim_{x \to 0} f(x)$)

(b) calculăm $\lim_{x \to \infty} f(x) = l$ (rspectiv $\lim_{n \to 0} f(x)$).

(c) conform criteriului cu şiruri $\lim f(x) = l$ inseamnă:

pentru orice şir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cu proprietăţile: a) $x_n \longrightarrow \infty$

b) $x_n \in \mathbb{D}$

avem $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = l.$

Observăm că şirul $x_n = n$ indeplineşte condiţiile a) si b) şi

în plus, pentru acest şir avem: $f(x_n) = a_n$, deci $\lim\limits_{n \to \infty} a_n =$

$\lim\limits_{n \to \infty} f(n) = l$.

EXERCITII:

I. Utilizând criteriul cu şiruri să se calculeze:

1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{4x + 5}{2x^2 - 3}$.

2. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\sqrt{2x + 2} - \operatorname{arctg} x \right)$

3. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{ctg} x + x \right)$

4. $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt[3]{\cos x}$

5. $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{3^x + 9}$

II. Arătaţi că nu există:

1. $\lim\limits_{x \to \infty} \cos x$

2. $\lim\limits_{x \to \infty} \operatorname{tg} x$

3. $\lim\limits_{x \to \infty} e^{\sin x}$

4. $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{1 + \sin^2 x}$

5. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2 \cdot \sin x + \cos x}{3 + \cos 2x}$

6. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x - [x] \right)$

7. Dacă f are limită la stânga (dreapta) în x_0, atunci:

$l_s(x_0) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_0 - \frac{1}{n})$ (respectiv $l_d(x_0) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_0 + \frac{1}{n})$.

(Manual cls XI)

8. Dacă $\lim\limits_{n \to \infty} f(x) = l$, atunci $\lim\limits_{n \to \infty} f(n) = l$, dar nu şi reciproc.

9. Nu există $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ dacă $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcţie periodică neconstantă. Consecinţe: nu există $\lim\limits_{x \to \infty} \sin x$, $\lim\limits_{n \to \infty} \cos x$, $\lim\limits_{n \to \infty} \operatorname{tg} x$, $\lim\limits_{x \to \infty} \operatorname{ctg} x$.

Raspuns: 9. Acest exerciţiu este generalizarea exerciţiilor 1.- 6. . Pentru rezolvare, explicităm ipoteza:

- f - periodică $\Leftrightarrow$ $\exists\, T > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{D}, \quad f(x + T) = f(x)$

- f - neconstantă $\Leftrightarrow$ $\exists\, a, b \in \mathbb{D} \quad f(a) \neq f(b)$

Utilizăm acum metoda 1_s. Şirurile $x_n = a + nT$, $y_n = b + nT$ îndeplinesc condiţiile a) şi b), iar:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} f(a + nT) = \lim_{n \to \infty} f(a) = f(a)$$

$$\lim_{n \to \infty} f(y_n) = \lim_{n \to \infty} f(b + nT) = \lim_{n \to \infty} f(b) = f(b)$$

III. Să se determine punctele în care au limită funcţiile:

f, g, $f \circ g$, $g \circ f$ pentru:

1. $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ 2 & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$ $\qquad g(x) = \begin{cases} 2x + 3 & x \in \mathbb{Q} \\ 3x + 1 & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} \sin x & x \in \mathbb{Q} \\ \cos x & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$ $\qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & x \in \mathbb{Q} \\ -\dfrac{\pi}{2} & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & x \in \mathbb{Q} \\ 8 & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$ $\qquad g(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$

Raspuns: 1. fie $x_o \in \mathbb{D} = \mathbb{R}$ oarecare. Studiem dacă f are limită în x_o. Pentru aceasta observăm că esta esenţial dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este raţional sau iraţional. Considerăm mai întâi situaţia când şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este format doar din puncte raţionale (sau doar doar din puncte iraţionale).

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>un şir de puncte raţionale</u> cu proprietăţile a), b), c). Avem: $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} x_n^2 = x_o^2$.

Fie $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>un şir de puncte iraţionale</u> cu proprietăţile a), b), c). Avem: $\lim\limits_{n \to \infty} f(y_n) = \lim\limits_{n \to \infty} 2 = 2$. Deci funcţia nu are limită în orice punct x_o pentru care $x_o^2 \neq 2$, adică $x_o \neq \pm 2$. Pentru $x_o = \sqrt{2}$ considerăm un şir oarecare $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu proprietăţile a), b), c). El

se descompune în două subşiruri: $(x'_n)_{n\in N}$ format doar cu termeni raţionali şi $(x''_n)_{n\in N}$ doar cu termeni iraţionali.Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = \lim_{n\to\infty} (x'_n)^2 = (\sqrt{2})^2 = 2 \text{ şi } \lim_{n\to\infty} f(x''_n) = \lim_{n\to\infty} 2 = 2,$$

deducem că $\lim_{x\to\sqrt{2}} f(x) = 2$.Analog pentru $x = -\sqrt{2}$.

METODE SPECIFICE PENTRU ŞIRURI

11. ORICE SIR MONOTON SI MARGINIT ESTE CONVERGENT. Aplicarea acestei metode revine la studiul monotoniei şi mărginirii, iar pentru determinarea limitei se trece la limită în relaţia de recurenţă a şirului respectiv. Dacă iniţial nu este dată o astfel de relaţie, ea se poate obţine la studiul monotoniei.

Exemplu: $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$

(a) Pentru studiul monotoniei şi mărginirii nu putem aplica metoda funcţiei ataşate $\left(f(x) = \dfrac{x!}{x^x} \text{ nu are sens} \right)$. Utilizăm metoda raportului (începem cu studiul monotoniei deoarece (1) dacă şirul este monoton, cel puţin jumătate din problema mărgirii este rezolvată, după cum s-a mai arătat; (2) dacă şirul nu este monoton nu putem aplica metoda deci nu mai studiem mărginirea.

Avem deci:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{e} < 1$$

Deci şirul este descrescător.

(b) **Mărginirea** . Fiind descrescător şi cu termeni pozitivi

şirul este mărginit între 0 şi a_1. Există deci $l = \lim_{n\to\infty} a_n$.

(c) Pentru calculul lui l observăm că la studiul monotoniei am obţinut relaţia de recurenţă:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \iff a_{n+1} = a_n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

Trecând la limită în această egalitate obţinem:

$$l = l\cdot\frac{1}{e}. \iff l = 0.$$

EXERCITII:

1. $a_n = \dfrac{2^n}{(n!)^2}$

2. $a_n = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{3^n\cdot n!}$

3. $a_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}$ – n radicali

4. $a_n = \left(\dfrac{2}{2!} + \dfrac{7}{3!} + \ldots + \dfrac{n^2-2}{n!}\right) + \dfrac{n+2}{n!}$, $n \ge 2$

5. $a_n = \left(\dfrac{7}{1\cdot 8} + \dfrac{7}{8\cdot 15} + \ldots + \dfrac{7}{(7n-6)\cdot(7n+1)}\right) + \dfrac{1}{7n+1}$

6. $a_n = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{2k+3}{5^k}$

7. $a_n = \dfrac{1}{b_1} + \dfrac{1}{b_2} + \ldots + \dfrac{1}{b_n}$, unde $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ îndeplineşte

condiţiile: a) $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, b) $b_n(b_{n+1} - b_n) \le 1$.

8. $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

9. $a_n = \dfrac{1}{\sqrt[k]{1}} + \dfrac{1}{\sqrt[k]{2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt[k]{n}}$

Raspunsuri:

3. Se observă relaţia de recurenţă: $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$.

a) <u>Monotonia:</u> $a_{n+1} - a_n = \sqrt{2 + a_n} - a_n$. Pentru a compara această diferenţă cu zero, facem o alegere, de exemplu $a_{n+1} \geq a_n$, pe care o transformăm prin echivalenţe:

$$a_{n+1} \geq a_n \iff \sqrt{2 + a_n} \geq a_n \iff 2 + a_n \geq a_n^2 \iff$$

$$a_n^2 - a_n - 2 \leq 0 \; ; \quad x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, \quad x_2 = 2$$

Deci $a_{n+1} \geq a_n \iff a_n \in (-1 \, , \, 2)$.

Am ajuns astfel la concluzia că <u>şirul este crescător dacă şi numai dacă este mărginit între -1 şi 2.</u> Avem, evident $a_n > 0 > -1$ deci mai trebuie arătat că $a_n < 2$. Această inegalitate o demonstrăm prin inducţie:

$$P(n): \; a_n \leq 2$$

Verificare: $P(1)$: $a_1 \leq 2 \iff \sqrt{2} \leq 2$ (adevărat).

$P(n) \Rightarrow P(n + 1)$.

$P(n + 1)$: $a_{n+1} \leq 2 \iff \sqrt{2 + a_n} \leq 2 \iff 2 + a_n \leq 4 \iff$

$\iff a_n \leq 2$.

Deci am demonstrat monotonia şi mărginirea. Există deci $l = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$. Pentru determinarea lui l trecem la limită în relaţia de recurenţă (<u>de data aceasta o astfel de relaţie este dată iniţial</u>):

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_{n+1} = \lim_{n \to \infty} \sqrt{2 + a_n} \Rightarrow l = \sqrt{2 + l}$$

$\Rightarrow l^2 = 2 + l \Rightarrow l = -1$ sau $l = 2$. Cum $l = -1$ este imposibil, deoarece $a_n > 0$, deducem $l = 2$.

6. Descompunem fracţia $\dfrac{2k + 3}{5^k}$ într-o diferenţă de termeni consecutivi:

$$\frac{2k + 3}{5^k} = \frac{A \cdot k + B}{5^k} + \frac{C \cdot k + D}{5^k} \tag{3.4}$$

Pentru determinarea celor patru parametri:

a) utilizăm metoda identificării şi

b) punem condiţia ca termenii din membrul drept în (3.4) să fie consecutivi.

a) $2k + 3 \equiv 5Ak + 5B - Ck - D \iff$

$\iff 2k + 3 = k(5A - C) + 5B - D$

b) numitorii sînt consecutivi, deci punem condiţia ca şi numărătorii să fie în aceeaşi relaţie de consecutivitate: numitorul primei fracţii se obţine din numitorul celei de-a doua prin înlocuirea lui k cu k-1, deci şi ître numărători trebuie să avem aceeaşi relaţie:

$$A\cdot k + B = C(k - 1) + D$$

$$\iff \qquad A\cdot k + B = C\cdot k + (D - C)$$

Am obţinut astfel sistemul:

$$\begin{cases} 5A - C = 2 \\ 5B - D = 3 \\ A = C \\ B = D - C \end{cases}$$

cu soluţia: $A = C = \frac{1}{2}$, $B = \frac{-3}{8}$, $D = \frac{1}{8}$

Rezultă:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k + 3}{5^k} = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\frac{1}{2}k - \frac{3}{8}}{5^{k-1}} - \frac{\frac{1}{2}k + \frac{1}{8}}{5^k} \right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{2}k - \frac{3}{8}}{5^{k-1}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{2}k + \frac{1}{8}}{5^k} = \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{5\cdot 8} + \frac{1}{5^2\cdot 8} + \dots \right.$$

$$\left. \dots + \frac{\frac{1}{2}n - \frac{3}{8}}{5^{n-1}} \right] - \left[\frac{5}{5\cdot 8} + \frac{9}{5^2\cdot 8} + \dots + \frac{\frac{1}{2}n + \frac{1}{8}}{5^n} \right] =$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{\frac{1}{2}n + \frac{1}{8}}{5^n} \text{, prin urmare } \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{8}.$$

7. Avem $\frac{1}{b_n} \geq \frac{1}{b_{n+1}} - \frac{1}{b_n}$,

deci $a_n \geq (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \ldots + (b_{n+1} - b_n) = b_{n+1} - b_1 \longrightarrow \infty$.

8. Se aplică concluzia de la 7.

II. Studiaţi convergenţa şirurilor definite prin:

1. $a_{n+1} = \frac{5 \cdot a_n + 3}{a_{n+1}}$, cu a_0 dat.

2. $x_{n+1} = x_n^2 - 2 \cdot x_n + 2$, cu x_1 dat.

3. $x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + n \cdot x_n^2}$, cu $x_1 > 0$ dat.

4. $a_n = \frac{1}{2} \cdot \left[a_{n-1} + \frac{\alpha}{a_{n-1}} \right]$, cu $a_0 > 0$ dat.

5. $a_n = \frac{x}{2} - \frac{a_{n-1}}{2}$, cu $x \in [0, 1]$

6. $x_n = \frac{2 \cdot a \cdot x_{n-1}}{a + x_{n-1}}$, cu $a, x_0 > 0$ daţi.

7. $a_n = \int_n^{n+1} e^{-x^2} dx$.

Indicatii:

4. şir cu termeni pozitivi (inducţie) şi descrescător.

5. $a_{2k+2} - a_{2k} > 0$, $a_{2k+3} - a_{2k+1} < 0$ şi $|a_k| < \frac{1}{2}$. Fie l_1 şi l_2 limitele subşirurilor de indice par şi impar. Se arată că $l_1 = l_2$.

12. UTILIZAREA LEMELOR CESARO - STOLZ SI RIZZOLI

Lemă: (*Cesaro - Stolz*) Fie $(\alpha_n)_{n\in N}$ un şir oarecare şi $(\beta_n)_{n\in N}$ un şir strict crescător, având limita infinit.

Dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha_{n+1}-\alpha_n}{\beta_{n+1}-\beta_n} = l$ – finită sau infinită,

atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha_n}{\beta_n} = l$.

Această lemă se poate utiliza la calculul limitelor de şiruri ce pot fi puse sub formă de fracţie:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} \tag{3.5}$$

şi a limitelor de forma:

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha_{n+1}-\alpha_n}{\beta_{n+1}-\beta_n}$ – în ipoteza că această limită există şi $(\beta_n)_{n\in N}$ este strict monoton.

CONSECINŢE:

(A) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.

Într-adevăr, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\ln \sqrt[n]{a_n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{n}} =$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln a_{n+1} - \ln a_n}{n+1-n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \ln \frac{a_{n+1}}{a_n}} = e^{\ln \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}} =$$

$= e^{\ln l} = l$.

Exemplu: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, deoarece pentru $a_n = n$, avem: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

(B) Limitele mediilor aritmetică, geometrică şi armonică a primilor n termeni ai unui şir având limita l, au valoarea tot l:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}} = \lim_{n\to\infty} a_n$$

Observație: o variantă a lemei Cesaro - Stolz pentru cazul cînd α_n, $\beta_n \longrightarrow 0$ a fost demonstrată de I. Rizzoli [Gazeta Mat. Nr. 10-11-12, 1992, p. 281-284]:

Lemă. *(I. Rizzoli)* Dacă $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt două șiruri de numere reale care îndeplinesc condițiile:

(i) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$; $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$

(ii) șirul $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict monoton (crescător sau descrescător)

(iii) există $l = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}-\alpha_n}{\beta_{n+1}-\beta_n}$

Atunci $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = l$.

EXERCIȚII:

I 1. $a_n = \frac{\ln n!}{n^2}$

2. $a_n = \frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^3}$

3. $a_n = \frac{1^p+2^p+\dots+n^p}{n^{p+1}}$

4. $a_n = \frac{1^p+3^p+\dots+(2n-1)^p}{n^{p+1}}$

5. $a_n = \frac{1^p+2^p+\dots+n^p}{n^p} - \frac{n}{p}$

6. $a_n = \frac{\sum_{k=1}^{n}(4k-1)^p}{n^{p+1}}$

7. $a_n = \frac{1\cdot3+3\cdot5+\dots+(2n-1)(2n+1)}{n^2}$

8. $a_n = \dfrac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k + 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (k+1) + \ldots + (n-k+1)\cdot(n-k+2)\cdot \ldots \cdot n}{n^k}$

9. $a_n = \dfrac{1 + \sqrt[4]{2!} + \sqrt[9]{3!} + \ldots + \sqrt[n^2]{n!}}{n}$

II. 1. $a_n = \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

2. $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}}$

3. $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{(n+1)(n+2)\ \ldots\ (2n)}{n!}}$

4. $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sqrt{1 + \dfrac{k^m}{n^{m+1}}} - 1 \right)$

(*Ind.*: amplificare cu conjugata, metoda majorării şi minorării, lema Cesaro-Stolz).

5. Fie $x_{n+1} = \ln(1 + x_n)$, $x_0 > 0$. Utilizînd lema Cesaro-Stolz să se arate că $\lim\limits_{n \to \infty} n \cdot x_n = 2$.

(*Ind.*: $nx_n = \dfrac{n}{\frac{1}{x_n}}$)

III. Calculaţi limitele următoarelor şiruri în ipoteza că ele există:

1. $L_n = \sqrt[n+1]{(n + 1)!} + \sqrt[n]{n!}$ (şirul Lalescu)

2. $a_n = \sqrt[n+1]{\dfrac{(n + 2)(n + 3)\ \ldots\ (2n + 2)}{(n + 1)!}} - \sqrt[n]{\dfrac{(n + 1)(n + 2)\ \ldots\ (2n)}{n!}}$

3. $a_n = n^p \left[\dfrac{\pi^2}{6} - \left(1 + \dfrac{1}{2^2} + \ldots . + \dfrac{1}{n^2} \right) \right]$ ştiind că:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{\pi^2}{6}$$

4. $a_n = n^p\left(\frac{\sin 1}{n^2+1}+\frac{\sin 2}{n^2+2}+\dots+\frac{\sin n}{n^2+n}\right)$

5. $a_n = 1^p + 2^p + \dots n^p - \frac{n^{p+1}}{p} - \frac{n^p}{2}$

6. $a_n = n^p\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}-\ln n - c\right)$ unde $p > 0$

unde $p > 0$ şi c este constanta lui Euler.

Raspunsuri:

1. Aplicăm lema Cesaro - Stolz pentru $\alpha_n = \sqrt{(n+1)!}$ şi $\beta_n = n$.

Avem $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n/\beta_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n!/n^n} = 1/e$ şi prin ipoteză rezultă $\lim (\alpha_{n+1}-\alpha_n)/(\beta_{n+1}-\beta_n) = l$, deci $l = 1/e$.

6. Considerăm $\alpha_n = 1+\frac{1}{2}+\dots\frac{1}{n} - \ln n - c$ şi $\beta_n = \frac{1}{n^p}$.

Avem $$\frac{\alpha_{n+1}-\alpha_n}{\beta_{n+1}-\beta_n} = \frac{\frac{1}{n+1} - \ln\frac{n}{n+1}}{\frac{1}{(n+1)^p}-\frac{1}{n^p}} =$$

$$= \frac{n^p(n+1)^p\left(\frac{1}{n+1}+\ln\frac{n}{n+1}\right)}{n^p-(n+1)^p} =$$

$$= \frac{n^{2p}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p\left(\frac{1}{n+1}+\ln\frac{n}{n+1}\right)}{-n^{p-1}\left(C_p^1+\frac{1}{n}C_p^2+\dots\right)}$$ şi ţinem cont că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}+\ln\frac{n}{n+1}}{\frac{1}{n^2}} = -\frac{1}{2}$$ (se poate utiliza funcţia

ataşată) obţinem: $$l = \begin{cases} 0 & \text{dacă } p \in (0, 1) \\ \frac{1}{2} & \text{dacă } p = 1 \\ \infty & \text{dacă } p > 1 \end{cases}$$

Teoremă: (Lagrange, (1736-1813)). Dacă $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ este continuă pe $[a,b]$ şi derivabilă pe (a,b), atunci: $\exists\ c \in (a,b)$ a.i. $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Această teoremă se poate utiliza pentru:

(A) **Calculul limitelor de şiruri în care poate fi pusă în evidenţă o expresie de forma:**

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad (3.6)$$

pentru funcţia ataşată.

Exemplu: $a_n = \sqrt{n}\left[\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n}\right]$

Rezolvare: a) punem în evidenţă o expresie de forma (3.6) considerând $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x}$, $f : [n,n+1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

b) aplicăm teorema lui Lagrange funcţiei f pe intervalul $[n,n+1]$: $\exists\ c \in (n,n+1)$ $\dfrac{f(n+1) - f(n)}{n + 1 - n} = f'(c_n)$.

c) înlocuim în a_n expresia $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ cu $f'(c_n)$. Obţinem: $a_n = \sqrt{n}\left(1 + \dfrac{1}{c_n}\right)^{c_n} \cdot \left[\ln\left(1 + \dfrac{1}{c_n}\right) - \dfrac{1}{1 + c_n}\right]$

d) utilizăm inegalităţile: $n < c_n < n + 1$ pentru a obţine majorări (minorări) convenabile. În cazul nostru, avem:

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{c_n} < \frac{1}{n}\ ,\quad \text{deci}\quad \frac{1}{n+2} < \frac{1}{1+c_n} < \frac{1}{n+1}$$

Rezultă:

$$a_n < \sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{c_n}\right)^{c_n}\left[\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+2}\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{n}}{n+2}\left[1+\frac{1}{c_n}\right]^{c_n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-2}-1\right] \longrightarrow 0\cdot e\cdot 0 = 0.$$

(B) **Calculul limitelor de şiruri ce pot fi puse sub una din formele:**

$$1_B. \quad a_n = f'(1) + f'(2) + \ldots + f'(n)$$

$$2_B. \quad a_n = f'(1) + f'(2) + \ldots + f'(n) - f(n),$$

f fiind o funcţie căreia i se poate aplica teorema lui Lagrange pe intervalele: $[n,n+1]$, $n \in \mathbb{N}$.

Observaţie: <u>şirurile de forma 2_B sunt întotdeauna monotone şi mărginite (deci convergente) dacă f este o funcţie derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi astfel încît f şi f' au monotonii diferite.</u>

Demonstraţie: pentru a face o alegere, să presupunem că f este crescătoare şi f' descrescătoare;

1. monotonia: $a_{n+1} - a_n = \left[f'(1) + f'(2) + \ldots + f'(n) - f(n+1)\right] -$

$- \left[f'(1) + f'(2) + \ldots + f'(n) - f(n)\right] =$

$= f'(n+1) - \left(f(n+1) - f(n)\right)$

2. aplicăm teorema lui Lagrange funcţiei f pe intervalul $[n,n+1]$:

$$\exists\, c_n \in (n\,,\, n+1) \quad \text{a.î.} \quad f(n+1) - f(n) = f'(c_n) \qquad (3.7)$$

$$n < c_n < n+1 \quad \Rightarrow \quad f'(n) > f'(c_n) > f'(n+1) \qquad (3.8)$$

deci $a_{n+1} - a_n = f'(n+1) - f'(c_n) < 0$ (f' - descrescătoare) de unde deducem că şirul este descrescător.

3. mărginirea: şirul fiind descrescător, este mărginit superior de a_1 . Mai trebuie găsită o margine inferioară. Pentru aceasta, scriem (3.8) începând de la $n = 1$ şi obţinem astfel posibilita-

tea de a minora (majora) şirul a_n:

$n = 1 \quad 1 < c_1 < 2 \quad \Rightarrow \quad f'(1) > f'(c_1) > f'(2)$

$n = 2 \quad 2 < c_2 < 3 \quad \Rightarrow \quad f'(2) > f'(c_2) > f'(3)$

$n = 3 \quad 3 < c_3 < 4 \quad \Rightarrow \quad f'(3) > f'(c_3) > f'(4)$

....

$n = n \quad n < c_n < n + 1 \quad \Rightarrow \quad f'(n) > f'(c_n) > f'(n+1)$

deci $a_n = f'(1) + f'(2) + \ldots + f'(n) - f(n) >$

$$> f'(c_1) + f'(c_2) + \ldots + f'(c_n) - f(n)$$

Obţinem un inlocuitor convenabil pentru suma:

$$f'(c_1) + f'(c_2) + \ldots + f'(c_n)$$

Scriem relaţia (3.7) incepând de la $n = 1$ şi adunăm egalităţile obţinute:

$n = 1 \quad \exists\, c_1 \in (1 , 2) \quad f(2) - f(1) = f'(c_1)$

$n = 2 \quad \exists\, c_2 \in (2 , 3) \quad f(3) - f(2) = f'(c_2)$

$n = 3 \quad \exists\, c_3 \in (3 , 4) \quad f(4) - f(3) = f'(c_3)$

....

$n = n \quad \exists\, c_n \in (n , n + 1) \quad f(n + 1) - f(n) = f'(c_n)$

$$f(n + 1) - f(1) =$$

$$= f'(c_1) + f'(c_2) + \ldots + f'(c_n)$$

rezultă: $a_n \le f(n + 1) - f(1) - f(n) < - f(1)$, prin urmare, şirul este mărginit inferior. Este deci convergent. Limita sa este un număr intre $- f(1)$ şi a_1 .

EXERCIŢII:

I. Utilizând teorema lui Lagrange, să se calculeze limitele şirurilor:

1. $a_n = n^p \left[a^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n+1}} \right]$, $a > 0$

2. $a_n = n^p \cdot \ln \frac{n+1}{n}$

3. $a_n = n^p \left(\operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg} n \right)$

4. $a_n = n^p \left[\frac{1}{n^q} - \frac{1}{(n+1)^q} \right]$

5. $a_n = \frac{a^{n+1} - a^n}{n^p}$

6. $a_n = \frac{\sin \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n+1}}{\ln \frac{n+1}{n}}$

7. $a_n = n^2 \left[\frac{\operatorname{arctg} n}{n} - \frac{\operatorname{arctg}(n+1)}{n+1} \right]$

II. Să se studieze convergența șirurilor:

1. $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$ (limita acestui sir se numeste constanta lui Euler $c \in (0,1)$)

2. $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ (sumele partiale ale seriei armonice $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$)

3. $a_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha}$ (sumele partiale ale seriei armonice generalizate)

4. $a_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \cdot \ln k}$

5. $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+k}$

6. $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$

7. $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n^2+1} - \operatorname{arctg} n$

Indicatie: **4.** pentru a avea una din formele 1_B sau 2_B determinăm pe f ţinând cont că: $f'(k) = \frac{1}{k \cdot \ln k}$, deci $f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x}$ şi $f(x) = \int \frac{1}{x \cdot \ln x} dx = \ln \ln x$. Aplicăm pentru această funcţie etapele din demonstraţiile de la inceputul acestui paragraf.

III. Să se arate că:

1. $1998 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{10^6}} < 1999$

2. $2 \cdot 10^k - 2 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{10^{2k}}} < 2 \cdot 10^k - 1$

3. $$\frac{p}{p-1}\left[a^{k(p-1)} - 1\right] < 1 + \frac{1}{\sqrt[p]{2}} + \frac{1}{\sqrt[p]{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[p]{a^{pk}}} < \frac{1}{p-1}\left[a^{k(p-1)} - \frac{1}{p}\right]$$

4. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^p} > \frac{n+1}{2}$

Indicatie: 1. trebuie arătat că:

$$1998 < f'(1) + f'(2) + \ldots f'(10^6) < 1999$$

pentru $f(x) = \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}$.

<u>Seria armonică</u> Seria $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ se numeşte serie armonică deoarece are proprietatea: oricare trei termeni consecutivi sunt in progresie armonică. Intr-adevăr, dacă notăm $b_n = \frac{1}{n}$ avem $b_n = \frac{2}{\frac{1}{b_{n-1}} + \frac{1}{b_{n+1}}}$. Mult timp s-a crezut

că acaestă serie are o sumă *s* finită. In antichitate se căuta

obținerea valorii aproximative a lui s, calculând suma a cât mai mulți termeni ai seriei. Astăzi se știe că $s = \infty$ (seria armonică este divergentă) . Menționăm câteva din metodele cu care se poate arăta acest lucru,metode care utilizează exerciții din manualele de liceu,sau exerciții de nivelul celor de liceu:

1. Teorema lui Lagrange (exercițiul I.2)

2. Inegalitatea: $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$

care se demonstrează prin inducție în clasa X-a. Într-adevăr, dacă s ar avea o valoare finită:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = s < \infty$$

atunci notând $R_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots$ am avea: $a_n + R_n = s$

și deoarece $s = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, deducem $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$.

$$\text{Dar}\quad R_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \dots >$$

$$> \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$$

deci R_n nu tinde la zero. Așadar nici s nu este finit .

3. Utilizarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = \ln 2$

care se studiază în clasa XII - a.

4. Utilizarea inegalității:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\ \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2^n} > \frac{n+1}{2} .$$

5. Utilizarea definiției integralei (sume Riemann) (vezi metoda 16,exercițiul II.) .

14. SIRURI DATE PRIN RELATII DE RECURENTA.

(A) RECURENŢA LINIARA

1. Recurenţa liniară de ordinul întîi

Este de forma:

$$a_{n+1} = \alpha \cdot a_n \ , \quad \text{cu } a_0 \text{ dat}$$

Expresia termenului general rezultă observînd că:

$$a_{n+1} = q \cdot a_n = q^2 \cdot a_{n-1} = \dots = q^{n-1} \cdot a_0$$

deci $a_{n+1} = q^{n+1} \cdot a_0$.

Exemplu: $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{10} a_n$, cu a_0 dat.

Avem: $a_{n+1} = \frac{11}{10} a_n = \left(\frac{11}{10}\right)^{n+1} \cdot a_0$.

2. Recurenţa liniară de ordin doi

Este de forma:

$$a_{n+1} = \alpha_1 a_n + \alpha_2 a_{n-1} \ , \quad \text{cu } a_0 \text{ şi } a_1 \text{ daţi.}$$

Pentru a găsi expresia termenului general în acest caz, ne folosim de expresia termenului general de la recurenţa de ordinul întîi. Am văzut că pentru această recurenţă avem: $a_n = a_0 q^n$. Căutăm şi pentru recurenţa de ordinul doi termenul general de aceeaşi formă:

$a_n = c \cdot q^n$, c fiind o constantă încă nedeterminată.

Înlocuind în relaţia de recurenţă, obţinem:

$$q^{n+1} = \alpha_1 \cdot q^n + \alpha_2 \cdot q^{n-1}$$

de unde, împărţind cu q^{n-1}, obţinem <u>ecuaţia caracteristică:</u>

$$q^2 - \alpha_1 \cdot q - \alpha_2 = 0$$

Considerăm următoarele cazuri:

a) $\Delta > 0$ (ecuația caracteristică are rădăcini reale și distincte q_1 și q_2)

În acest caz, neexistând motiv pentru a neglija una dintre rădăcini, modificăm expresia lui a_n considerând-o de forma:

$$a_n = c_2 \cdot q_1^n + c_2 \cdot q_2^n$$

și determinăm constantele c_1 și c_2 astfel încât primii doi termeni ai șirului să aibă valorile date inițial.

Exemplu: $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, cu $a_0 = a_1 = 1$ (șirul lui Fibonacci)

Ecuația caracteristică este: $q^2 - q - 1 = 0$ cu rădăcinile:

$q_1 = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$ și $q_2 = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Considerând a_n de forma:

$$a_n = c_1\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

din sistemul: $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 1 \end{cases}$ obținem:

$$c_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} \quad \text{și} \quad c_2 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}}$$

deci $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$, $n \geq 0$.

Observație: $q_2 = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ este cunoscut încă din antichitate sub numele de *numarul de aur*. El este limita șirului:

$a_n = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots + \sqrt{1}}}$ (n radicali) (se aplică metoda 11).

Acest număr se regăsește adeseori în natură (dispunerea crengilor pe copaci, a frunzelor pe ramuri, proporții în corpul omenesc

etc.(Pentru amănunte vezi de exemplu Matila Ghika: *Estetică şi teoria artei*, Editura ştiinţifică şi enciclopedică, Bucureşti, 1981).

b) $\Delta = 0$ (ecuaţia caracteristică are rădăcini egale $q_1=q_2$)

În acest caz considerăm a_n de forma:

$$a_n = c_1 \cdot q_1^n + n \cdot c_2 \cdot q_1^n$$

(adică $a_n = q_1^n \cdot P_1(n)$, cu P_1 – polinom de gradul unu) şi determinăm pe c_1 şi c_2 punând aceeaşi condiţie, ca primii doi termeni să aibă valorile date iniţial.

Exemplu: $a_{n+2} = a_{n+1} - \frac{1}{4} a_n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$.

Luând $a_n = c \cdot q^n$ obţinem ecuaţia caracteristică:

$$q^2 - q + \frac{1}{4} = 0 \quad , \quad \text{cu rădăcinile} \quad q_1 = q_2 = \frac{1}{2} \ .$$

Considerând:

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot (c_1 + c_2 n) \quad ,$$

din sistemul: $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 2 \end{cases}$, obţinem: $c_1 = -4$, $c_2 = 6$, deci:

$$a_n = \frac{1}{2^n} (6n - 4) \quad \text{şi} \quad \lim_{n \to \infty} a_n = 0 \ .$$

c) $\Delta < 0$ (ecuaţia caracteristică are rădăcini complexe)

Fie acestea: $q_1 = r(\cos t + i \cdot \sin t)$ şi $q_2 = r(\cos t - i \cdot \sin t)$

Avem: $a_n = c_1 \cdot q_1^n + c_2 \cdot q_2^n$, dar pentru a folosi doar numere reale, se arată că putem înlocui pe q_1^n şi q_2^n respectiv cu:

$$\frac{q_1^n + q_2^n}{2} = r^n \cos nt \quad \text{şi} \quad \frac{q_1^n - q_2^n}{2} = r^n \sin nt$$

Atunci putem scrie $a_n = r^n(c_1 \cos nt + c_2 \sin nt)$.

3. Recurență liniară de ordin h (mai mare decât 2)

Este de forma:

$$a_{n+h} = \alpha_1 \cdot a_{n+h-1} + \alpha_2 \cdot a_{n+h-2} + \ldots + \alpha_h \cdot a_n$$

cu primii h termeni dați.

Procedând ca la recurența de ordin doi, combinăm $a^n = c \cdot q$ și punem condiția să fie satisfăcută relația de recurență. Obținem ecuația caracteristică:

$$q^h = \alpha_1 \cdot q^{h-1} + \alpha_2 \cdot q^{h-2} + \ldots + \alpha_h$$

Distingem următoarele cazuri:

a) dacă ecuația caracteristică are toate rădăcinile reale și distincte: q_1 , q_2 , ... , q_h , vom considera pe a_n de forma:

$$a_n = c_1 \cdot q_1^n + c_2 \cdot q_2^n + \ldots + c_h \cdot q_h^n$$

și determinăm constantele c_i , $i \in \overline{1,h}$, punând condiția ca primii k termeni ai șirului să aibă valorile date inițial.

b) dacă o rădăcină, de exemplu q_1, este multiplă de ordin s, ($q_1 = q_2 = \ldots = q_s$), înlocuim suma $c_1 \cdot q_1^n + c_2 \cdot q_2^n + \ldots + c_s \cdot q_s^n$ din expresia lui a_n cu: $c_1 \cdot P_{s-1}(n)$, P_{s-1} fiind un polinom de grad s-1, ai cărui coeficienți se determină punând condiția ca primii s termeni să aibă valorile date inițial.

c) dacă o rădăcină, de exemplu q_1, este complexă, atunci și conjugata ei este o rădăcină a ecației caracteristice (fie de exemplu $q_2 = \overline{q_1}$) . În acest caz înlocuim în expresia lui a_n suma: $c_1 \cdot q_1^n + c_2 \cdot q_2^n$ cu:

$$r^n (c_1 \cos nt + c_2 \sin nt)$$

iar dacă rădăcina q_1 este multiplă de ordin s ($q_1 = q_2 = \ldots q_s$ și

$q_{s+1} = q_{s+2} = \ldots = q_{2s} = \overline{q_1}$) înlocuim în expresia lui a_n termenii ce conțin rădăcina complexă cu:

$$r^n(c_1 \cos nt + c_2 \sin nt) + n \cdot r^n(c_3 \cos nt + c_4 \sin nt) + \ldots$$
$$\ldots + n^{s-1} \cdot r^n(c_{2s-1} \cos nt + c_{2s} \sin nt).$$

EXERCITII:

I. **Determinați expresia termenului general și calculați limita pentru:**

1. $a_{n+1} = \frac{3}{2} a_n$, cu a_0 dat

2. $a_{n+1} = a_n \cdot \ln x$, cu $a_0 = a^x$

3. $a_{n+1} = a^x \cdot a_n$ cu $a_0 = \ln x$

4. $a_{n+2} = \dfrac{3 \cdot a_{n+1} - a_n}{2}$ cu $a_1 = 1$, $a_2 = 2$

5. $a_{n+2} = 2 \cdot a_{n+1} - 2 \cdot a_n$ cu $a_1 = 1$, $a_2 = 2$

6. $a_{n+3} = 7 \cdot a_{n+2} - 16 \cdot a_{n+1} + 12 \cdot a_n$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = -1$

7. $a_{n+3} = 3 \cdot a_{n+2} - 3 \cdot a_{n+1} + a_n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 6$, $a_2 = 17$

8. $a_{n+4} + 2 \cdot a_{n+3} + 3 \cdot a_{n+2} + 2 \cdot a_{n+1} + a_n = 0$,
   $a_0 = a_1 = 0$, $a_2 = -1$, $a_3 = 0$

II. 1. Să se determine α astfel încât șirul dat prin relația de recurență: $a_{n+2} = \alpha \cdot a_{n+1} = 3 \cdot a_n$, $a_1 = 0$, $a_2 = 2$ **să aibă limită și să se calculeze limita.**

2. Scrieți relațiile de recurență și termenii generali ai șirurilor pentru care: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, iar rădăcinile ecuației caracteristice sunt:

a) $q_1 = 1$, $q_2 = -\frac{1}{2}$

b) $q_1 = q_2 = 1$, $q_3 = \frac{1}{2}$

c) $q_1 = \frac{1 + i\cdot\sqrt{3}}{2}$, $q_2 = \frac{1 - i\cdot\sqrt{3}}{2}$

d) $q_1 = 1 + i$, $q_2 = 1 - i$, $q_3 = 1$

3. Fie $a_n = A\cdot\alpha^n + B\cdot\beta^n$; cu $a, B, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi $A, B \neq 0, |\alpha| \neq |\beta|$.Să se determin α şi β astfel ca :

a) şirul (x_n) să fie convergent;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$

4. Fie $a_n = A\cdot\alpha^n + B.n.\beta^n$, $n \geq 1$, cu $A, B, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $A, B \neq 0$.Să se determine α şi β astfel ca şirul să fie convergent.

(B) RECURENŢA NELINIARA

1. Recurenţă de forma $a_{n+1} = \alpha\cdot a_n + \beta$, cu a_0 dat

Expresia termenului general se obţine observând că dacă l este rădăcină a ecuaţiei $l = \alpha\cdot l + \beta$ (obţinută înlocuind pe a_{n+1} şi a_n cu l în relaţia de recurenţă) atunci şirul $(a_n - l)_{n\in\mathbb{N}}$ este o progresie geometrică.

Exemplu: $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{2}$

Din ecuaţia $l = \frac{l + 1}{2}$ deducem $l = 1$.

Atunci şirul $(a_n - 1)_{n\in\mathbb{N}}$ este o progresie geometrică.

Fie $b_n = a_n - 1$. Avem $b_1 = a_1 - 1 = -\frac{1}{2}$, $b_2 = a_2 - 1 =$

$= \frac{a_1 + 1}{2} - 1 = -\frac{1}{4}$.

Raţia progresiei geometrice este deci: $q = \frac{1}{2}$. Obţinem:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\left(\frac{1}{2}\right)^n ,$$

deci $a_n = b_n + 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1$ şi $\lim_{n \to \infty} a_n = 1$.

2. <u>Recurenţă de forma $a_{n+1} = \alpha \cdot a_n + f(n)$</u>

(f fiind o funcţie oarecare)

Termenul general se găseşte pe baza observaţiei că dacă $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir care verifică aceeaşi relaţie de recurenţă, atunci orice şir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ care verifică relaţia dată este de forma:

$$a_n = c \cdot \alpha^n + b_n \quad , \quad \text{cu} \quad c = a_0 - b_0 .$$

În practică se alege b_n de forma:

$$b_n = f(n)$$

coeficienţii lui f fiind nedeterminaţi. Aceşti coeficienţi se determină punând condiţia ca $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ să verifice relaţia de recurenţă.

<u>Caz particular:</u> recurenţă de forma:

$$a_{n+1} = \alpha \cdot a_n + \beta^n \cdot P(n)$$

cu P polinom de grad s .

Exemplu: $a_{n+1} = 3 \cdot a_n + 5^n (n^2 + 2n + 3)$, $a_0 = 1$

Căutăm şirul b_n de forma: $b_n = 5^n (u \cdot n^2 + v \cdot n + w)$. Punem con-

diția ca $(b_n)_{n\in N}$ să verifice relația de recurență dată:

$$b_{n+1} = 3\cdot b_n + 5^n(n^2 + 2n + 3)$$

Obținem:

$$5^{n+1}(u(n+1)^2 + v(n+1) + w) = 3\cdot 5^n(un^2 + vn + w) +$$
$$+ 5^n(n^2 + 2n + 3)$$

Prin identificare rezultă: $a = \frac{1}{2}$, $v = -\frac{3}{2}$, $w = \frac{21}{4}$,

deci: $b_o = \frac{21}{4}$ și $a_n = 5^n(a_o - b_o) + b_n =$

$$= -\frac{17}{4}\cdot 5^n + 5^n\left(\frac{1}{2}u^2 - \frac{3}{2}u + \frac{21}{4}\right) = 5^n\left(\frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + 1\right).$$

3. Recurență de forma $a_{n+1} = f(a_n)$
(cu $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funcție continuă)

Teoremă: 1. Dacă funcția $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ este continuă și crescătoare pe $[a,b]$, atunci:

a) dacă $a_1 > a_o$, șirul $(a_n)_{n\in N}$ este crescător

b) dacă $a_1 < a_o$, șirul $(a_n)_{n\in N}$ este descrescător

Linta șirului este un punct fix al lui f , adică o soție a ecuației caracteristice $f(x) = x$.

2. Dacă f este descrescătoare pe $[a,b]$, atunci subșirurile de indice par respectiv impar ale lui $(a_n)_{n\in N}$ sînt monotone și de monotonii diferite. Dacă aceste două subșiruri au limite, atunci acestea sunt egale.

Exemplu: $a_1 = 10$, $a_{n+1} = \dfrac{2 + a_n^2}{2\cdot a_n}$

Avem $f(x) = \dfrac{2 + x^2}{2x}$; din tabelul de variație deducem că f

este descrescătoare pe $(0, \sqrt{2})$ și crescătoare pe $(\sqrt{2}, \infty)$.

Prin inducție se demonstrează că $a_n > \sqrt{2}$, și cum $a_2 = 5,1 < a_1$ înseamnă că șirul este descrescător.

Mărginirea se poate deduce din proprietatea funcțiilor continue definite pe intervale închise și mărginite de a fi mărginite.

Ecuația caracteristică $f(x) = x$ are rădăcinile $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$, deci $l = \sqrt{2}$.

<u>Caz particular:</u> recurența omografică:

$$a_{n+1} = \frac{\alpha \cdot a_n + \beta}{\gamma \cdot a_n + \delta} \quad , \quad \text{cu } a_0 \text{ dat}$$

Avem: $f(x) = \dfrac{\alpha \cdot x + \beta}{\gamma \cdot x + \delta}$ - numită funcție omografică și:

$f'(x) = \dfrac{\alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma}{(\gamma \cdot x + \delta)^2}$, deci monotonia lui f depinde de semnul expresiei $\alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma$.

Dacă $x_1 \neq x_2$ sunt rădăcinile ecuației caracteristice $f(x) = x$, notând: $\theta = \dfrac{\gamma \cdot x_1 + \delta}{\gamma \cdot x_2 + \delta}$ se poate arăta că termenul general a_n al șirului este dat de relația:

$$\frac{x_2 - a_n}{x_1 - a_n} = \theta^n \frac{x_2 - a_0}{x_1 - a_0}$$

Exemplu: $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{2}{1 + a_n}$.

Să se arate că: $a_1 < a_3 < a_5 < \ldots < 1 < \ldots < a_4 < a_2 < a_0$. De aici rezultă că șirul este convergent (se descompune în două

subşiruri convergente) . Se deduce că limita şirului este 1.

EXERCITII:

I. Determinaţi termenul general şi studiaţi convergenţa şirurilor:

1. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a \cdot a_n + 1$ cu $|a| < 1$

2. $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = 2a_n + 3^n(n^2 - n - 1)$

3. $a_0 = 0$, $a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + \frac{3}{2^n} \cdot n$

4. $a_0 = 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{n^2}{2^n}$

5. $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + 1}}$

6. $a_0 > 1$, $a_{n+1} = \dfrac{2}{1 + a_n}$

7. $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{2 \cdot a_n - 1}{2 \cdot a_n + 5}$

8. $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = a \cdot a_n + b$. Determinaţi coeficienţii a şi b astfel încât şirul să aibă limită finită. Calculaţi această limită.

9. $a_1 \neq 2$, $a_{n+1} = \dfrac{2}{2 - a_n}$ este periodic.

II. 1. $x_0 \in \left(0 , \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4} , \pi\right)$; $\sin x_n + \cos x_n = 1$

2. $x_0 = a$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n^3 + 4 \cdot x_n}{8}$

3. $x_0 = 1$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left[x_{n-1} + \dfrac{a}{x_{n-1}}\right]$

4. $x_0 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{\dfrac{x_n}{a + b\cdot x_n}}$, $a,b > 0$.

15. ORICE SIR Cauchy DE NUMERE REALE ESTE CONVERGENT

Unul din exercițiile recapitulative din manualul de analiză pentru clasa a XI-a cere să se arate că dacă un șir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de numere reale este convergent, atunci:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall m,n \geq \varepsilon \quad |a_m - a_n| < \varepsilon \qquad (3.9)$$

Un șir care satisface condiția (3.8) se numește șir Cauchy sau șir fundamental. Se demonstrează că un <u>șir de numere reale este convergent dacă și numai dacă este șir Cauchy.</u> Această propoziție permite demonstrarea convergenței unor șiruri arătând că ele sunt șiruri Cauchy.

În astfel de exerciții se folosește condiția:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall m,n \geq n_\varepsilon \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon \qquad (3.9')$$

care este echivalentă cu (3.9) dar mai comod de folosit.

Exemplu: $a_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dots + \dfrac{1}{n!}$

Trebuie arătat că:

(a) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_\varepsilon \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$

(b) fie $\varepsilon > 0$. Să vedem dacă există n_ε astfel încât să aibă loc proprietatea (a)

(c) avem: $|a_{n+p} - a_n| = \dfrac{1}{(n+p)!} + \dfrac{1}{(n+p-1)!} + \dots$

$$\dots + \frac{1}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+p)} + \dots + \frac{1}{n+1}\right) <$$

$$< \frac{1}{n!}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1} + \dots + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{n!}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^p}{1-\frac{1}{2}} <$$

$$< \frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{n!} < \frac{2}{n}$$

(d) punem condiția: $\frac{2}{n} < \varepsilon$ și obținem $n > \frac{2}{\varepsilon}$, deci putem lua: $n_\varepsilon = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1$.

EXERCITII:

I. Să se arate că următoarele șiruri sunt fundamentale:

1. $a_n = \frac{1}{n}$

2. $a_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+2)}$

3. $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$

4. $a_n = 1 + \frac{\cos x}{3} + \frac{\cos 2x}{3^2} + \dots + \frac{\cos nx}{3^n}$

5. $a_n = \frac{\sin x}{n^2+1} + \frac{\sin 2x}{n^2+2} + \dots + \frac{\sin nx}{n^2+n}$

6. $a_n = \frac{\cos x}{2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \dots + \frac{\cos nx}{2^n}$

7. $a_n = \frac{\cos \alpha_1}{1\cdot 2} + \frac{\cos \alpha_2}{2\cdot 3} + \dots + \frac{\cos \alpha_n}{n(n+1)}$

8. $a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$

9. Fie $a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ unde:

a) $b_k \cdot b_{k+1} < 0$

b) $|b_1| > |b_2| > \dots > |b_n| > \dots$

c) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Să se arate că $|a_{n+p} - a_n| < b_{n+1}$ pentru orice $n, p \in \mathbb{N}$. Să

se deducă de aici că şirul este Cauchy.

INDICATII:

3. $|a_{n+p} - a_n| < \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots$

$$\ldots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)}$$

şi facem descompuneri în fracţii simple.

8. $|a_{n+p} - a_n| = \left|(-1)^{n+p-1}\frac{1}{n+p} + (-1)^{n+p-2}\frac{1}{n+p-1} + \ldots\right.$

$$\left.\ldots + (-1)^n\frac{1}{n+1}\right| = \left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + (-1)^{p-1}\frac{1}{n+p}\right|$$

Dacă p este impar deducem:

$$|a_{n+p} - a_n| = \left|\frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) - \ldots\right.$$

$$\left.\ldots - \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right)\right| < \frac{1}{n+1},$$

iar dacă este par:

$$|a_{n+p} - a_n| = \left|\frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) - \ldots\right.$$

$$\left.\ldots - \left(\frac{1}{n+p-2} - \frac{1}{n+p-1}\right) - \frac{1}{n+p}\right| < \frac{1}{n+1}$$

Deci: $|a_{n+p} - a_n| < \frac{1}{n+1}$. Din condiţia: $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$ obţinem: $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right] + 1$.

9. Procedăm ca la exerciţiul precedent, unde am avut:

$$b_n = (-1)^n\frac{1}{n}.$$

Se ştie că suma Riemann ataşată funcţiei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, corespunzător unei diviziuni:

$$\Delta = \{ a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b \}$$

şi puncelor intermediare $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, este:

$$\sigma_\Delta(f,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) \qquad (3.10)$$

Dacă punctele x_i sunt echidistante, atunci $x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}$ şi avem:

$$\sigma_\Delta(f,\xi) = \frac{b-a}{n}\Big[f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_n) \Big] \qquad (3.11)$$

O funcţie este integrabilă dacă: $\lim\limits_{\|\Delta\| \to 0} \sigma_\Delta(f,\xi)$ există şi este finită. Valoarea limitei se numeşte integrala funcţiei f pe intervalul [a,b] :

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sigma_\Delta(f,\xi) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Pentru a utiliza definiţia integralei în calculul limitelor de şiruri, observăm că pentru diviziuni Δ formate cu puncte echidistante, avem:

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sigma_\Delta(f,\xi) = \lim_{n \to \infty} \sigma_\Delta(f,\xi)$$

Deci putem proceda astfel:

a) arătăm că termenul general a_n se poate pune sub forma:

$$a_n = \frac{b-a}{n}\Big[f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_n) \Big]$$

cu f funcţie continuă pe [a,b] , iar ξ_i fiind punctele unei diviziuni echidistante.

b) f fiind continuă este şi integrabilă, iar:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sigma_\Delta(f,\xi) \underset{\text{echidistante}}{\overset{\Delta \text{ are puncte}}{=\!=}} \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sigma_\Delta(f,\xi) \overset{f\text{-continua}}{=\!=}$$

$$== \int_a^b f(x)\, dx \, .$$

Exemplu: $a_n = n^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^3 + k^3}$

a) scriem pe a_n sub forma:

$$a_n = \frac{b - a}{n} \Big[f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_n) \Big]$$

punînd în evidenţă factorul comun $\frac{1}{n}$. Avem:

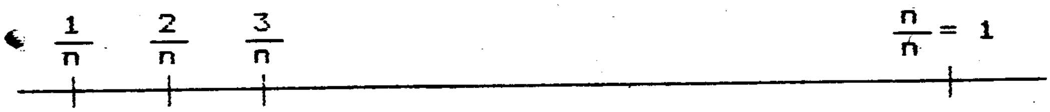
$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{n^3}{n^3 + k^3} = \frac{1}{n} \left[\frac{n^3}{n^3 + 1^3} + \frac{n^3}{n^3 + 2^3} + \dots + \frac{n^3}{n^3 + n^3} \right]$$

b) în $f(\xi_i) = \frac{n^3}{n^3 + i^3}$ facem să apară punctele hidis-tante $\frac{(b - a)i}{n}$:

$$\frac{n^3}{n^3 + i^3} = \frac{1}{1 + \left(\frac{i}{n}\right)^3}$$

şi deducem funcţia f. Avem: $f(x) = \frac{1}{1 + x^3}$.

c) aşezăm punctele echidistante pe o dreaptă:



şi deducem diviziunea: $\Delta = \{ 0, \dots, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n} = 1 \}$ şi intervalul [a,b] .

d) observăm că a_n este suma Riemann corespunzătoare funcţiei (continue, deci integrabile) f şi diviziunii Δ deduse, pe intervalul [a,b] . Cum punctele lui Δ sunt echidistante, avem:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sigma_\Delta(f,\xi) = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sigma_\Delta(f,\xi) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\,dx = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

EXERCITII.

I. Utilizând definiția integralei calculați limitele următoarelor șiruri:

1. $a_n = \frac{1}{n^6}\sum_{i=1}^{n} i^5$

2. $a_n = n\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3n^2+i^2}$

3. $a_n = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i.e^{i/n}$

4. $a_n = \frac{\pi}{2n}\sum_{i=1}^{n-1} \cos\frac{i\pi}{2n}$

5. $a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{(n+i)\sqrt{n^2+i^2}}$

6. $a_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\dots(n+n)}$

7. $a_n = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \ln(i^2+n^2) - 2(n-1)\ln n\right)$

Indicatii: 4. $a_n = \frac{\pi/2}{n}\sum_{i=1}^{n} \cos\frac{(\pi/2)i}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx.$

6. Logaritmând obținem $\ln a_n = -\ln n + \frac{1}{n}(\ln n + \ln(n+1) + \dots +$

$\ln(n+n)) = -\ln n + \frac{1}{n}(\ln n + \ln n(1+\frac{1}{n}) + \dots + \ln n(1+\frac{n}{n})) =$

$\frac{1}{n}(\ln(1+\frac{1}{n}) + \ln(1+\frac{2}{n}) + \dots + \ln(1+\frac{n}{n})) \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^1 \ln(1+x)\,dx.$

II. (a) Scrieți suma Riemann $\sigma_\Delta(f,\xi)$ corespunzătoare funcției $f : [\varepsilon,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, diviziunii $\Delta = (\varepsilon, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots \frac{n}{n} = 1)$ și punctelor intermediare $\xi_i = i/n$.(b) Calculați $\lim_{n\to\infty} \sigma_\Delta(f,\xi) = l(\varepsilon)$. (c) Calculați $\lim_{\varepsilon\to 0} l(\varepsilon)$ și deduceți că $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}) = \infty$.

4. CONTINUITATE SI DERIVABILITATE

CONTINUITATE

DEFINITIE: Funcția $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ este continuă în $x_o \in D$ dacă:

1. are limită în x_o ,
2. limita este egală cu $f(x_o)$,

adică

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall x \in D \quad |x - x_o| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$$

CONSECINTA: Orice funcție continuă într-un punct are limită în acel punct.

(A) Metode pentru studiul continuității

1. Utilizarea definiției.

Exemplu: $f(x) = \dfrac{x + 1}{2x + 3}$ este continuă în $x = 1$.

Într-adevăr, să arătăm că:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\} \quad |x - 1| < \delta_\varepsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left| \frac{x + 1}{2x + 3} - f(1) \right| < \varepsilon$$

Fie $\varepsilon > 0$ oarecare. Trebuie să determinăm pe δ_ε . Avem:

$$\left| \frac{x+1}{2x+3} - f(1) \right| = \left| \frac{x+1}{2x+3} - \frac{2}{5} \right| = \frac{|x-1|}{5|2x-3|} < \frac{\delta_\varepsilon}{5|2x+3|} <$$

$$< \frac{\delta_\varepsilon}{15}$$

deoarece pe intervalul $[0,2]$, de exemplu, $|2x + 3|$ este mărginit între 3 și 7 . Determinăm pe δ_ε din condiția $\frac{\delta_\varepsilon}{15} < \varepsilon$.

Putem lua de exemplu $\delta_\varepsilon = 2\varepsilon$. Atunci:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon = 2\varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{-3}{2}\} \quad |x - 1| < 2\varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad |f(x) - f(1)| < \varepsilon$$

și deci f este continuă în $x = 1$.

2. Utilizarea criteriului cu limite laterale

$$\underline{f \text{ este continuă în } x_o \iff l_s(x_o) = l_d(x_o) = f(x_o)}$$

unde $l_s(x_o)$ și $l_d(x_o)$ sunt respectiv limita la stânga și la dreapta în x_o .

EXEMPLU: Să studiem continuitatea funcției:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\sin^2\alpha - \dfrac{x}{e^{1-x}} \sin\alpha + \dfrac{x^2}{4}} & x \in [0 , 1] \\ 1/2 & x = 1 \\ \dfrac{3}{2(x^2+x+1)} & x \in [1 , 2] \end{cases}$$

pentru $\alpha \in [0 , 2\pi]$.

REZOLVARE: Deoarece se cere să se studieze continuitatea, fără

a se specifica un punct anume, trebuie făcut studiul pe tot domeniul de definiție. Punctele domeniului apar ca fiind de două categorii:

1. Puncte de legătură între ramuri, în care se studiază continuitatea utilizând de exemplu limitele laterale.

2. Celelalte puncte, în care funcția este continuă, fiind exprimată prin funcții (elementare) continue (dar acest lucru trebuie specificat de fiecare dată).

În cazul nostru :

(a) în orice punct $x_o \neq 1$ funcția este continuă fiind exprimată prin funcții continue.

(b) studiem continuitatea în $x_o = 1$. Avem:

$$l_s(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \sqrt{\sin^2\alpha - \frac{x}{x^{1-x}} + \frac{x^2}{4}} =$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \sqrt{\left(\sin \alpha - \frac{1}{2} \right)^2} = \left| \sin \alpha - \frac{1}{2} \right| ,$$

iar $l_d(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{3}{2}(x^2 + x + 1) = \frac{1}{2}$.

Valoarea funcției în punct este $f(1) = \frac{1}{2}$, deci f este continuă în $x = 1$ <=> $|\sin \alpha - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$. Pentru explicitarea modulului utilizăm tabloul cu semnul funcției $\sin \alpha - \frac{1}{2}$:

α	0		$\pi/6$		$5\pi/6$		2π
$\sin \alpha - 1/2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

1. dacă $\alpha \in [0 , \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{5\pi}{6} , 2\pi]$ ecuația devine:

$-\sin \alpha + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \iff \sin \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 , \alpha = \pi , \alpha = 2\pi$

2. dacă $\alpha \in \left(\frac{\pi}{6} , \frac{5\pi}{6}\right)$ obținem $\sin \alpha = 1$,

deci $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Pentru aceste patru valori ale lui α funcția este continuă și în punctul $x = 1$, deci este continuă pe $\mathbb{R}$.

3. Utilizarea criteriului cu șiruri.

Acest criteriu se obține din criteriul cu șiruri pentru limite de funcții înlocuind pe l cu $f(x_0)$ și renunțând la condiția $x_n \neq x_0$ (care în cazul limitelor este esențială, deoarece se poate studia limita unei funcții într-un punct în care $f(x\ )$ nu există).

EXEMPLU:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2x & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ x + 4 & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Procedând ca la Metoda 10 , cu cele două adaptări menționate mai sus, rezultă că f este continuă în punctele x_0 pentru care $3x_0^2 + 2x_0 = x_0 + 4$, adică $x_0 = \frac{-4}{3}$ și $x_0 = 1$.

(B) Tipuri de puncte de discontinuitate.

Punctul $x_0 \in D$ in care f nu este continua se spune ca este punct de discontinuitate de speta intii daca limitele laterale in x_0 exista si sunt finite.

Orice alt punct de discontinuitate se spune ca este de speta a doua.

(C) Prelungirea prin continuitate.

> A prelungi funcţia $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ înseamnă a adăuga domeniului D puncte noi, în care legea de corespondenţă se defineşte după voie.

Dacă M este mulţimea de puncte adăugată şi h este legea de corespondenţă pe M, prelungirea va fi:

$$f_p : D \cup M \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f_p(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dacă } x \in D \\ h(x) & \text{dacă } x \in M \end{cases}$$

De exemplu, $f : \mathbb{R} \setminus \{ 0 \} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ poate fi prelungită la întreaga mulţime $\mathbb{R}$ punând

$$f_p(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \alpha & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

Există deci foarte multe prelungiri ale unei funcţii. Totuşi, dacă f este continuă pe D şi are limită finită într-un punct $x_o \notin D$, există o singură prelungire $f_p : D \cup \{ x_o \} \longrightarrow \mathbb{R}$ care este continuă, numită prelungire prin continuitate a lui f în punctul x_o.

Deci, pentru exemplul nostru, deoarece $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$,funcţia

$$f_p(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{dacă } x \neq 0 \\ 1 & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

este singura prelungire a lui $\sin x / x$ care este continuă pe $\mathbb{R}$.

(D) Continuitatea funcţiilor compuse.

> *Daca f este continua in x_o si g este continua in $f(x_o)$, atunci gof este continua in x_o.*

$$\begin{array}{ccccc} D & & E & & F \\ x_0 & \longrightarrow & f(x_0) & \longrightarrow & g(f(x_0)) = (g\circ f)(x_0) \end{array}$$

Deci compunerea a două funcții continue este o funcție continuă.

Reciproc nu este adevărat: s-ar putea ca f şi g să nu fie continue şi totuşi $g\circ f$ să fie continuă.

De exemplu,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{dacă} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

nu este continuă în nici un punct, dar funcția $g(x) = (f\circ f)(x)$ este funcția identic egală cu 1 , deci este continuă în orice punct din $\mathbb{R}$.

EXERCITII:

I. Să se studieze, pe domeniul maxim de definiție, continuitatea funcțiilor definite prin:

1. $f(x) = x\cdot[x]$

2. $f(x) = [x]\cdot\sin \pi x$

3. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n + x}{x^{2n} + 1}$

4. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{nx}{1 + |nx|}$

5. $f(x) = \begin{cases} x & \text{dacă} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 2x & \text{dacă} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} u(x) & \text{dacă} \quad x \in \mathbb{Q} \\ v(x) & \text{dacă} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

7. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad \text{sau} \quad x = 0 \\ \dfrac{1}{q} & \text{dacă} \quad x = \dfrac{p}{q} \end{cases}$ (funcția lui Riemann)

8. $f(x) = \begin{cases} \left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|\cdot e^{\frac{-1}{|x|}} & \text{dacă} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{dacă} \quad x = 0 \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} x - p & \text{dacă } x \in \left[p, p + \frac{1}{2}\right] \\ p + 1 - x & \text{dacă } x \in \left(p + \frac{1}{2}, p + 1\right] \end{cases}$ $\quad p \in \mathbb{Z}$

(Manual)

10. $f(x) = \begin{cases} 27 \ln(-1-x) & \text{dacă } x < 0 \\ m & \text{dacă } x = 0 \\ 1+e^{-2x} & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$

II. Să se precizeze tipul punctelor de discontinuitate pentru funcțiile:

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} & x \neq 0 \\ \alpha & x = 0 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1 + x} - 1}{x} & x \neq 0 \\ \alpha & x = 0 \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 x}{1 - \cos x} & x \neq 2k\pi \\ \alpha & x = 2k\pi \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{x^2 - 8x + 7} & x \neq 1, \quad x \neq 7 \\ \alpha & x = 1 \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln|x|}{1 + \ln|x|} & x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{e}, 0, \frac{1}{e}\} \\ \alpha & x \in \{-\frac{1}{e}, 0, \frac{1}{e}\} \end{cases}$

Să se determine prelungirile prin continuitate, unde este posibil.

III. Să se studieze continuitatea funcțiilor f, g, $f \circ g$, $g \circ f$, pentru:

1. $f(x) = \operatorname{sgn} x$ $\qquad g(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ -x & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

2. $f(x) = [x]$ $\qquad g(x) = \ln x$

3. $f(x) = \left[1 + [x] \right]$ $\qquad g(x) = \operatorname{sgn} x$

4. $f(x) = \operatorname{sgn}(\operatorname{sgn} x)$ $\qquad g(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 3x^2 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

IV. 1. Fie $f,g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funcţii continue astfel încât $f(x) = g(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{Q}$. Să se arate că $f = g$
(Manual)

2. Fie $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea lui Darboux. Dacă f are limite laterale în orice punct din I, atunci f este continuă pe I.
(Manual)

3. Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încât:
$|f(x) - f(y)| \le \sqrt{|x-y|}$ pentru orice $x,y \in \mathbb{R}$. Să se arate că există $a > 0$ astfel încât pentru orice x cu $|x| \le a$ să avem $|f(x)| < a$. Să se deducă existenţa unui punct fix pentru f.
(x_o este punct fix pentru f dacă $f(x_o) = x_o$). (Manual)

4. Fie $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continuă. Atunci:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall x,y \in [a,b], \ |x-y| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon \qquad (4.1)$$

(Manual)

O funcţie cu proprietatea (4.1) se numeşte <u>funcţie uniform continuă pe [a,b]</u>.

Uniform continuitatea se defineşte deci pe un interval, în timp ce continuitatea se poate defini într-un punct.

Luînd în (4.1) $y = x_o$ se deduce că orice funcţie uniform continuă pe un interval este continuă pe acel interval.

Exerciţiul 4. de mai sus afirmă reciproca acestei propoziţii, care este adevărată dacă intervalul este închis şi mărginit.

DERIVABILITATE

(A) Definiţie. Interpretare geometrică. Consecinţe.

DEFINITIE. Funcţia $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ este derivsbilă în $x_0 \in D$ dacă există şi este finită limita:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Valoarea acestei limite se notează cu $f'(x_0)$ şi se numeşte derivata lui f în x_0.

INTERPRETATRE GEOMETRICA. Derivata unei funcţii într-un punct x_0 este panta tangentei la graficul lui f în punctul de abscisă x_0.

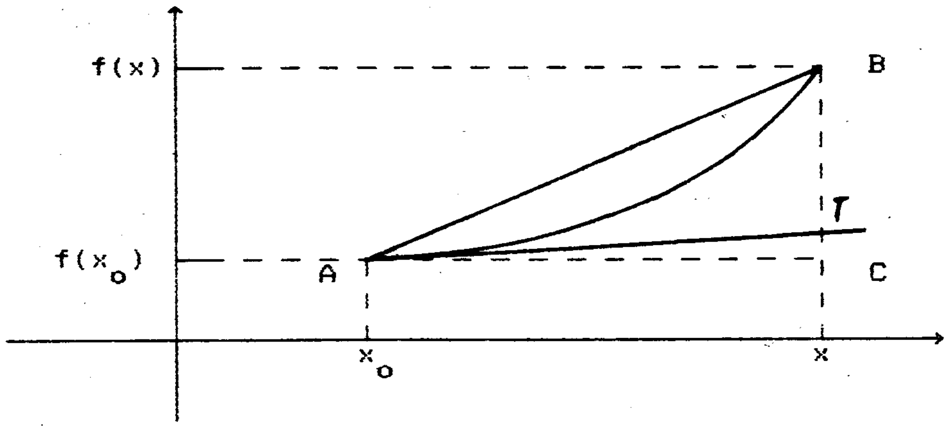


Fig. 4.1

Când x tinde la x_0, coarda AB tinde către tangenta în A la grafic, deci panta corzii

$$m_{AB} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

tinde către panta tangentei. Aşadar $f'(x_0)$ este panta tangentei în punctul de abscisă x_0 la grafic.

Interpretarea geometrică a derivatei rezultă deci din următorul şir de implicaţii:

$$AB \xrightarrow{x \to x_o} AT \Rightarrow m_{AB} \xrightarrow{x \to x_o} m_{AT} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = m_{AT} \Rightarrow f'(x_o) = m_{AT}$$

CONSECINTE. **1. Orice funcţie derivabilă într-un punct este continuă în acel punct.**

2. Ecuaţia tangentei la graficul unei funcţii derivabile.

Se ştie că ecuaţia unei drepte ce trece prin punctul $(x_o, f(x_o))$ este:

$$y - f(x_o) = m(x - x_o)$$

şi inlocuind pe m cu $f'(x_o)$ (panta tangentei la grafic) obţinem <u>ecuaţia tangentei la grafic în punctul de abscisă x_o</u>:

$$y - f(x_o) = f'(x_o)(x - x_o)$$

3. Ecuaţia normalei (perpendiculara pe tangentă) se deduce din condiţia de perpendicularitate a două drepte ($m_1 \cdot m_2 = -1$) şi deci este:

$$y - f(x_o) = \frac{-1}{f'(x_o)}(x - x_o)$$

(B) <u>Derivarea funcţiilor compuse.</u>

$$(f(u(x)))' = f'(u(x)) \cdot u'(x) \qquad (4.2)$$

Din formula (4.2) se deduce:

$$(f_3(f_2(f_1(x))))' = f_3'(f_2(f_1(x))) \cdot f_2'(f_1(x)) \cdot f_1'(x)$$

Deci, pentru a deriva o funcţie compusă procedăm astfel:

(a) derivăm ultima funcţie care se compune (în cazul nostru f_3) şi înlocuim în această funcţie variabila x cu expresia rezultată din compunerea celorlalte funcţii (în cazul nostru $f_2 \circ f_1$).

(b) neglijând funcţia derivată la etapa precedentă (în cazul nostru pe f_3) se derivează funcţia care a devenit ultima (pentru noi f_2) şi de asemenea se înlocuieşte variabila x cu expresia rezultată din compunerea funcţiilor care încă nu au fost derivate (în această etapă noi avem doar $f_1(x)$)

(c) se continuă procedeul până se derivează toate funcţiile.

EXEMPLU: $\cos^2 \sin \sqrt[3]{x^2+1}$

1 Aplicând formula (4.2) avem:

$$f'(x) = 2\cdot\cos \sin \sqrt[3]{x^2+1}\left[\cos \sin \sqrt[3]{x^2+1}\right]' = 2\cdot\cos \sin \sqrt[3]{x^2+1}\,\cdot$$

$$\cdot\left(-\sin \sin \sqrt[3]{x^2+1}\right)\left(\sin \sqrt[3]{x^2+1}\right)' = 2\cdot\cos \sin \sqrt[3]{x^2+1}\,\cdot$$

$$\cdot\left(-\sin \sin \sqrt{x^2+1}\right)\cdot\cos \sqrt{x^2+1}\cdot\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)' =$$

$$2\cdot\cos \sin \sqrt[3]{x^2+1}\cdot\left(-\sin \sin \sqrt[3]{x^2+1}\right)\cdot$$

$$\cdot\cos \sqrt[3]{x^2+1}\;\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}\cdot 2x$$

Putem obţine acelaşi rezultat mult mai repede, utilizând generalizarea formulei (4.2), prezentată mai sus.

Astfel, funcţiile care se compun sânt:

$f_1(x) = x^2+1$, $f_2(x) = \sqrt[3]{x}$, $f_3(x) = \sin x$

$f_4(x) = \cos x$, $f_5(x) = x^2$

iar $f(x) = f_5(f_4(f_3(f_2(f_1(x)))))$, deci:

$f'(x) = f_5'(f_4(f_3(f_2(f_1(x))))) \cdot f_4'(f_3(f_2(f_1(x)))) \cdot f_3'(f_2(f_1(x))) \cdot$

$\cdot f_2'(f_1(x)) \cdot f_1'(x) = 2 \cdot \cos \sin \sqrt[3]{x^2+1} \cdot \left(-\sin \sin \sqrt[3]{x^2+1}\right) \cdot$

$\cdot \cos \sqrt[3]{x^2+1} \cdot \dfrac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2+1}} \cdot 2x$

CONSECINTE: 1. Derivata funcţiei inverse.

Din $f^{-1}(f(x)) = x$, aplicând formula (4.2) rezultă:

$\left(f^{-1}(f(x))\right)' \cdot f'(x) = 1$, sau notând $y = f(x)$:

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = (f'(x))^{-1}$$

EXEMPLU: Pentru $f(x) = \ln x$, $f : (0.\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ avem:

$f^{-1}(x) = e^x$ şi deci cum $y = \ln x \Rightarrow x = e^y$ obţinem:

$(e^y)' = \left((\ln x)'\right)^{-1} = \left(\frac{1}{x}\right)^{-1} = x = e^y.$

2. Derivate de ordin superior ale funcţiilor compuse.

Din $\left(f(u(x))\right)' = f'(u(x)) \cdot u'(x)$, derivând din nou în raport cu x rezultă:

$$\left(f(u(x))\right)'' = \left(f'(u(x) \cdot u'(x)\right)' = f''(u(x)) \cdot u'(x) \cdot u'(x) +$$
$$+ f'(u(x)) \cdot u''(x) = f''(u(x)) \cdot \left(u'(x)\right)^2 + f'(u(x)) \cdot u''(x)$$

Am obţinut astfel derivata de ordinul doi a funcţiei compuse, şi procedeul poate continua.

EXEMPLU: Să calculăm $f''(x)$ dacă $f(x) = g(e^{-x})$, g fiind o funcție derivabilă de două ori pe $\mathbb{R}$.

Avem: $f'(x) = g'(e^{-x})\cdot(-e^{-x})$ și $f''(x) = g''(e^{-x})(-e^{-x})^2 +$
$+ g'(e^{-x})(e^{-x}) = e^{-x}\left(g'(e^{-x}) - g''(e^{-x})\cdot e^{-x} \right)$.

(C) Derivate de ordinul n

Pentru calculul derivatei $f^{(n)}(x)$ putem utiliza una din următoarele metode:

1. Calculăm câteva derivate (f' , f'' , f''' , ...) pentru a deduce expresia lui $f^{(n)}$, pe care o demonstrăm apoi prin inducție.

2. Utilizăm formula lui Leibniz de derivare a produsului a două funcții:

$$\left(f(x)\cdot g(x) \right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, f^{(n-k)}(x)\cdot g^{(k)}(x)$$

Formula poate fi aplicată și unui cât, deoarece:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\cdot \frac{1}{g(x)}$$

(D) Studiul derivabilității.

Pentru a studia derivabilitatea unei funcții procedăm astfel:

(a) deosebim două categorii de puncte ale domeniului: puncte în care știm că funcția este derivabilă (fiind exprimată prin funcții derivabile) și puncte în care urmează să studiem derivabilitatea (în general puncte de legătură dintre ramuri).

(b) pentru studiul derivabilității în această a doua categorie

de puncte se utilizează una din următoarele metode:

(1) calculăm derivatele laterale cu ajutorul definiției

(2) calculăm derivatele laterale cu ajutorul <u>Corolarului teoremei lui Lagrange</u>: Dacă f este derivabilă intr-o vecinătate a lui x_o şi continuă in x_o şi dacă există

$$\lambda_s = \lim_{x \to x_o} f'(x) \quad (\text{ respectiv } \lambda_d = \lim_{x \to x_o} f'(x))$$

atunci f are derivată la stânga (respectiv la dreapta) in x_o. şi $f'_s(x_o) = \lambda_s$ (respectiv $f'_d(x_o) = \lambda_d$)

<u>Condiția de continuitate in x_o care se cere in ipoteza corolarului este esențială pentru aplicarea acestuia, dar ea nu constituie de fapt o restricție când studiem derivabilitatea,</u> deoarece dacă f nu este continuă in x_o nu este nici derivabilă.

EXEMPLU: Să determinăm parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel incât funcția:

$$f(x) = \begin{cases} \ln^2 x & x > e \\ \alpha x + \beta & x < e \end{cases}$$

să fie derivabilă. Care este interpretarea geometrică a rezultatului obținut ?

Raspuns: Metoda 1. (utilizarea derivatelor laterale)

(a) in orice punct $x \neq e$ funcția este derivabilă, fiind exprimată prin funcții derivabile.

(b) studiem derivabilitatea in $x = e$.

Datorită propoziției : <u>f non continuă ==> f non derivabilă</u> studiem mai intîi continuitatea.

$$l_s(e) = \lim_{\substack{x \to e \\ x < e}} f(x) = \lim_{\substack{x \to e \\ x < e}} (\alpha x + \beta) = \alpha e + \beta$$

$l_d(e) = \lim\limits_{\substack{x \to e \\ x < e}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to e \\ x < e}} \ln^2 x = 1$ și $f(e) = \ln^2 e = 1$

deci: f continuă în e $\Leftrightarrow$ $\alpha e + \beta = 1$ (4.3)

Dacă nu este îndeplinită condiția de continuitate în $x = e$, funcția nu este nici derivabilă în acest punct, deci <u>studiem derivabilitatea presupunând că este îndeplinită condiția de continuitate.</u>

$$f'_s(e) = \lim_{\substack{x \to e \\ x < e}} \frac{f(x) - f(e)}{x - e} = \lim_{\substack{x \to e \\ x < e}} \frac{\alpha x + \beta - 1}{x - e} = [\,1 = \alpha e + \beta\,] =$$

$$= \lim_{\substack{x \to e \\ x < e}} \frac{\alpha x + \beta - \alpha e - \beta}{x - e} = \alpha .$$

$$f'_d(e) = \lim_{\substack{x \to e \\ x < e}} \frac{f(x) - f(e)}{x - e} = \lim_{\substack{x \to e \\ x < e}} \frac{\ln^2 x - 1}{x - e}$$

Pentru calculul acestei limite putem:

(1) aplica definiția derivatei,

(2) permuta limita cu logaritmul,

(3) utiliza regula lui l'Hospital.

(1) Observăm că notând $g(x) = \ln^2 x$ avem $g(e) = 1$ și limita devine:

$$\lim \frac{g(x) - g(e)}{x - e} = g'(e) \text{ (deoarece g este derivabilă în e)}$$

$$g'(x) = (\ln^2 x)' = 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow g'(e) = \frac{2}{e}, \text{ deci } f'_d(e) = \frac{2}{e}$$

(2) $$\lim_{\substack{x \to e \\ x < e}} \frac{\ln^2 x - 1}{x - e} = \lim_{\substack{x \to e \\ x < e}} \frac{\ln^2 x - \ln^2 e}{x - e} =$$

$$= \lim_{\substack{x \to e \\ x < e}} \frac{(\ln x - \ln e)(\ln x + \ln e)}{x - e} = 2 \cdot \lim_{\substack{x \to e \\ x < e}} \frac{\ln x - \ln e}{x - e} =$$

$$= 2 \cdot \lim_{\substack{x \to e \\ x < e}} \frac{\ln(x/e)}{x - e} = \lim_{\substack{x \to e \\ x < e}} \left[\frac{1}{x - e} \cdot \ln\left(\frac{x}{e}\right) \right] = \lim_{\substack{x \to e \\ x < e}} \ln\left(\frac{x}{e}\right)^{\frac{1}{x-e}} =$$

$= \ln \lim_{\substack{x \to e \\ x < e}} \left(\frac{x}{e}\right)^{\frac{1}{x-e}} = 1^{\infty}$, etc.

Aşadar, f este derivabilă în e $\iff f'_s(e) = f'_d(e) \iff$

$\iff \alpha = \frac{2}{e}$ şi din condiţia de continuitate obţinem $\beta = -1$.

Avem deci:

$$f(x) = \begin{cases} \ln^2 x & x > e \\ \frac{2}{e}x - 1 & x < e \end{cases}$$

<u>Interpretarea geometrică a rezultatului obţinut:</u> dreapta $y = \frac{2}{e}x - 1$ este tangentă la curba $y = \ln x^2$.

<u>Dacă o ramură a unei funcţii este exprimată printr-o dreaptă ($y = \alpha x + \beta$) funcţia este derivabilă în punctul x_o de legătură dintre ramuri dacă şi numai dacă dreapta respectivă este tangentă în punctul de abscisă x_o . la graficul celeilalte ramuri.</u>

<u>Metoda 2:</u> (Utilizarea Corolarului Teoremei lui Lagrange).

(a) În orice punct $x \neq e$ funcţia este derivabilă, fiind exprimată prin funcţii derivabile şi avem:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x}\ln x & x > e \\ \alpha & x < e \end{cases}$$

(b) Studiem derivabilitatea în $x = e$. Punem mai întâi condiţia de continuitate: $l_s(e) = l_d(e) = f(e) \iff \alpha e + \beta = 1$.

Pentru a utiliza corolarul teoremei lui Lagrange calculăm limitele laterale ale derivatei:

$\lim_{\substack{x \to e \\ x < e}} \alpha = \alpha$. Din corolar deducem $f'(e) = \alpha$. Analog, $f'_d(e) =$

$$\lim_{\substack{x \to e \\ x < e}} f'(x) = \frac{2}{e} .$$

Deci f este derivabilă în $x = e$ dacă și numai dacă $\alpha = \frac{2}{e}$.

Din condiția de continuitate deducem $\beta = -1$.

(E) Aplicații ale derivatei în economie

(vezi manualul de analiză matematică cls.IX)

1. Fie $\beta(x)$ beneficiul realizat pentru o cheltuială de x lei . Pentru orice cheltuială suplimentară de h lei beneficiul suplimentar pe leu cheltuit este:

$$\frac{\beta(x + h) - \beta(x)}{h}$$

Dacă h este suficient de mic acest raport dă o indicație asupra variației beneficiului corespunzător sumei de x lei.

Dacă există

$$\lim_{h \to 0} \frac{\beta(x + h) - \beta(x)}{h} = \beta'(x)$$

această limită se numește beneficiul marginal corespunzător sumei de x lei.

2. Fie $\gamma(p)$ costul total pentru producerea a p unități dintr-un produs. Atunci costul pe unitate suplimentară de produs este:

$$\frac{\gamma(p + h) - \gamma(p)}{h}$$

și limita acestui raport, când h tinde la zero, dacă există, se numește cost marginal al producției pentru p unități din produsul considerat.

EXEMPLU: Beneficiul realizat pentru o cheltuială de x lei

este $\beta(x) = x^2 - 3x + 2$. Pentru orice cheltuială suplimentară de h lei, calculaţi beneficiul suplimentar pe leu cheltuit şi beneficiul marginal corespunzător sumei de 1000 lei.

Răspuns: Beneficiul suplimentar pe leu cheltuit este:

$$\frac{\beta(x + h) - B(x)}{h} = \frac{(x + h)^2 - 3(x + h) + 2}{h}$$

Pentru $x = 1000$ acesta este egal cu $1997 + h$, iar

$$\lim_{h \to 0} \frac{\beta(x + h) - \beta(x)}{h} = 1997$$

EXERCITII:

I. Se cere:

1. Ecuaţia tangentei la graficul lui $f(x) = \ln \sqrt{1 + x^2}$ în punctul de abscisă $x_0 = 1$.

2. Ecuaţia tangentei la curba $f(x) = \sqrt{x^2 - k^2}$, care este paralelă cu Ox .

3. Ecuaţia tangentei la curba $f(x) = x^3$, paralelă cu prima bisectoare.

4. Ecuaţia tangentei la curba $y = \frac{3x + 2}{2x + 6}$, care este paralelă cu coarda ce uneşte punctele de abscise $x = 1$ şi $x = 3$.

5. Să se determine α şi β astfel încât $y = \alpha x + \beta$ şi $y = \frac{x - 1}{x}$ să fie tangente în $x = 1$. Să se scrie tangenta lor comună.

6. Să se arate că dreapta $y = 7x - 2$ este tangentă la curba $y = x^2 + 4x$. (Manual)

II.

1. Să se calculeze derivata funcţiei:

$$f(x) = \int_{0}^{x^2} e^{t^6} \cdot \sin t^2 \, dt$$

2. Fie $f : (-\infty, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x$. Să se determine un subinterval $J \subseteq \mathbb{R}$ astfel încât $f : (-\infty, 0) \longrightarrow J$ să fie bijectivă. Fie g inversa ei. Să se calculeze $g'(-1)$ şi $g''(-1)$. (Manual)

3. Dacă $|f(x) - f(y)| \leq M \cdot |x - y|^{1+\alpha}$, cu $\alpha > 0$ pentru orice $x, y \in I$, funcţia f este constantă pe I.

4. Dacă f are limită în punctul a, atunci funcţia $g(x) = (x - a) \cdot f(x)$ este derivabilă în a.

5. Dacă f este mărginită într-o vecinătate a lui x_0 atunci $g(x) = (x - x_0)^2 f(x)$ este derivabilă în x_0. Caz particular: $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Indicaţii:

1. Fie F o primitivă a funcţiei $f(t) = e^{t^6} \sin t^2$. Avem $I(x) = F(x^4) - F(0)$, deci $I'(x) = \left(F(x^4) \right)$.

3. Pentru $x \neq y$ inegalitatea din enunţ este echivalentă cu:

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq M \cdot |x - y|^{\alpha}$$

de unde, pentru $y \longrightarrow x$ obţinem $f'(x) = 0$, deci f este constantă pe I.

III. Calculaţi derivatele de ordinul n pentru :

1. $f(x) = \frac{1}{x - 3}$

2. $f(x) = \frac{1}{ax + b}$

3. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$

4. $f(x) = \ln(2x + 5)$

5. $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$

6. $f(x) = (x^3 - 2x^2 + 5x - 3) \cdot e^{x+1}$

7. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x + 3}$

8. $f(x) = \frac{x^3}{(x - 2)(x - 3)}$

9. $f(x) = \text{arctg}\ x$

10. $f(x) = e^{ax} e^{bx}$ din expresia derivatei de ordinul n să se deducă formula binomului lui Newton.

IV.

1. Arătaţi că:

a) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2} \right)$,

b) $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2} \right)$.

2. Aplicând formula lui Leibniz pentru $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$,

să se arate că:

$$n! \cdot \left[\frac{1}{(x - 1)^{n+1}} - \frac{1}{(x - 2)^{n+1}} \right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (n - k)! \cdot k! \cdot \frac{1}{(x - 1)^{n+1} \cdot (x-2)^{n+1}}$$

Găsiţi formule asemănătoare, cu ajutorul funcţiilor:

$f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$ şi $f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 - 5x + 4}$

3. Fie $I = (0,1)$ şi funcţiile $u,v : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $u(x) =$

$u(x) = \inf_{y \in I} (x - y)^2$, $v(x) = \sup_{y \in I} (x - y)^2$. Să se studieze dervabilitatea funcţiilor u şi v şi să se calculeze $\sup_{x \in I} u(x)$, $\inf_{x \in I} v(x)$. (Manual)

3. Dacă $f_n(x)$ este un şir de funcţii derivabile, având limită în orice punct x atunci:

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n\to\infty} f'(x) \qquad \text{(Manual)}$$

V. Să se studieze derivabilitatea funcţiilor :

1. $$f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + 3x) & x \in (0,1) \\ \frac{5}{4}(x - 1) + 2\cdot\ln 2 & x \geq 1 \end{cases}$$

2. $f(x) = \min\ (x^2 - x\ ,\ 4x - 2)$

3. $f_1(x) = |(x - 2)(x - 3)|$ $\qquad f_2(x) = |(x - 2)^2\cdot(x - 3)|$

$f_3(x) = |(x - 2)^3\cdot(x - 3)|$

4. $$f(x) = \begin{cases} \frac{-\pi}{4} & x = -1 \\ \displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{1 - t^2}}\, dt & x \in (-1\ ,\ 1) \\ \frac{\pi}{4} & x = 1 \end{cases}$$

5. $f'(x)$ dacă $\quad f(x) = \begin{cases} \ln^2(1 - x) & x \leq 0 \\ tg^2 x & x \geq 0 \end{cases}$

6. $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[1 + \frac{|x|}{x} \right] + \frac{1}{1 + e^{1/x}} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

7. $$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi:

$$f^{(n)}(x) = \left[\frac{1}{x^{n+1}}\right]\cdot\int_0^x t^n\cdot\cos(t + \frac{n\pi}{2})\,dt$$

8. $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-1} & x \le 0 \\ x\cdot\ln x & x \in (0,1) \\ \dfrac{e^{-x}}{e} & x \ge 1 \end{cases}$$

9. $$f(x) = \begin{cases} \arccos(\cos x) & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \arcsin(\sin x) & x \in \left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right] \end{cases}$$

10. $$f(x) = \frac{|x-1|\cdot e^{nx} + a(x+1)^2\cdot e^{-nx}}{e^{nx} + e^{-nx}}, \quad a \in \mathbb{R}$$

5. TEOREMELE FERMAT, ROLLE, LAGRANGE, CAUCHY

(A) TEOREMA LUI FERMAT (1601 - 1665)

1. Enunț: Dacă $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ este continuă pe $[a,b]$ și derivabilă pe (a,b), atunci în orice punct de extrem din (a,b) (din interiorul intervalului) derivata se anulează.

Obsrevatie: $x_0 \in (a,b)$ punct de extrem $\Longrightarrow$ $f'(x_0) = 0$

Dacă x_0 este punct de extrem la capetele intervalului, derivata poate să nu se anuleze în x_0.

Exemplu: $f(x) = 3x + 2$, $f:[-1,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ are două puncte de extrem: în $x_1 = -1$ și în $x_2 = 2$, iar $f'(-1) = f'(2) = 3$.

2. Interpretare geometrică și algebrică

a) Interpretare geometrică rezultă din interpretarea geometrică a derivatei:

- dacă sînt îndeplinite condițiile teoremei lui Fermat în orice

punct din interiorul intervalului, tangenta la graficul funcţiei este paralelă cu axa Ox.

b) <u>Interpretare algebrică:</u> dacă sînt îndeplinite condiţiile teoremei lui Fermat pe $[a,b]$, orice punct de extrem din (a,b) este rădăcină a ecuaţiei $f'(x) = 0$.

EXERCITII:

1. Dacă $a_1, a_2, \dots a_n$ sunt numere pozitive astfel încât: $a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x \ge n$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, atunci avem:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1$$

(Manual)

2. Fie $a_1, a_2, \dots a_n$, $b_1, b_2, \dots, b_n$ numere reale pozitive astfel încât:

$$a_1 \cdot b_1^x + a_2 \cdot b_2^x + \dots + a_n \cdot b_n^x \ge a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Atunci:

$$b_1^{a_1} \cdot b_2^{a_2} \cdot \dots \cdot b_n^{a_n} = 1$$

(generalizare a exerciţiului precedent)

3. Dacă f este continuă pe $[a,b]$ şi derivabilă pe (a,b), iar $f(a) = f(b) = 0$, atunci:

(i) dacă f' este crescătoare, rezultă $f(x) \le 0$ pe $[a,b]$;

(ii) dacă f' este descrescătoare, rezultă $f(x) \ge 0$ pe $[a,b]$.

4. Dacă $a^x \ge x^a$ pentru orice $x > 0$ atunci $a = e$.

5. $\frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} b} < \frac{a}{b}$ dacă $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$.

REZOLVARI:

1. Exerciţiul este caz particular al exerciţiului 2.

2. Punem în evidență o funcție ce are un punct de extrem (global) pe $\mathbb{R}$, observând că inegalitatea din ipoteză se poate scrie: $f(x) \geq f(0)$, cu $f(x) = a_1 \cdot b_1^x + a_2 \cdot b_2^x + \ldots + a_n \cdot b_n^x$. Deoarece această inegalitate este adevărată pentru orice x real rezultă că x $x = 0$ este punct de minim global pentru f. Conform teoremei lui Fermat în acest punct derivata se anulează, deci $f'(0) = 0$. Avem:

$$f'(x) = a_1 \cdot b_1^x \cdot \ln b_1 + a_2 \cdot b_2^x \cdot \ln b_2 + \ldots + a_n \cdot b_n^x \cdot \ln b_n$$

deci: $f'(0) = 0 \iff a_1 \cdot \ln b_1 + a_2 \cdot \ln b_2 + \ldots a_n \cdot \ln b_n = 0 \iff$

$$\iff b_1^{a_1} + b_2^{a_2} + \ldots + b_n^{a_n} = 1$$

3. (i) Presupunem prin absurd că există $c \in (a,b)$ astfel încât $f(c) > 0$. Putem presupune că c este chiar punct de maxim deoarece un astfel de punct există, conform teoremei lui Rolle deci avem $f'(c) = 0$.

Între c și b există cel puțin un punct d în care $f'(d) < 0$, căci dacă prin absurd $f'(x) \geq 0$ pentru orice $x \in (c,b)$ rezultă că f este crescătoare pe (c,b) și deci $f(c) \leq f(b) = 0$ implică $f(c) = 0$. Atunci din $f'(d) \leq 0 = f'(c)$ deducem contradicția:

$$f'(d) < f'(c) \quad \text{cu} \quad c < d$$

4. $a^x \geq x^a \iff x \cdot \ln a \geq a \cdot \ln x \iff \dfrac{\ln a}{a} \geq \dfrac{\ln x}{x}$ (pentru orice $x > 0$). Deci a este abscisa maximului funcției: $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. Avem: $f'(x) = 0 \iff x = e$, deci $a = e$.

5. $\dfrac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} b} < \dfrac{a}{b} \iff \dfrac{\operatorname{tg} a}{a} < \dfrac{\operatorname{tg} b}{b}$

(dacă $0 < a < b < \dfrac{\pi}{2}$).

Este suficient să arătăm că $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$ este crescătoare, adică $f'(x) > 0$.

(B) TEOREMA LUI ROLLE (1652 - 1719)

1. Enunț: | Dacă $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ este continuă pe $[a,b]$, derivabilă pe (a,b) și $f(a) = f(b)$, atunci există $c \in (a,b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.

Teorema lui Fermat afirmă că într-un punct de extrem din interiorul unui interval derivata se anulează, dar nu spune și când există un asemenea punct.

Teorema lui Rolle dă o condiție suficientă pentru existența a cel puțin un astfel de punct, adăugând la ipotezele din teorema lui Fermat și condiția: $f(a) = f(b)$.

2. Interpretare geometrică și algebrică

a) Interpretare geometrică: dacă sunt îndeplinite condițiile teoremei lui Rolle, există cel puțin un punct în intervalul (a,b) în care tangenta la grafic este paralelă cu ox.

b) Interpretare algebrică: dacă sunt îndeplinite condițiile teoremei lui Rolle, ecuația $f'(x) = 0$ are cel puțin o rădăcină în intervalul (a,b) .

Interpretarea algebrică a teoremei pune în evidență o metodă pentru a arăta că ecuația $f(x) = 0$ are cel puțin o rădăcină în intervalul (a,b). Pentru aceasta este suficient să considerăm o primitivă F a lui f, pentru care sunt îndeplinite condițiile teoremei lui Rolle pe $[a,b]$. Va rezulta că ecuația $F'(x) = 0$ are cel puțin o rădăcină în intervalul (a,b), adică $f(x)$ are o rădăcină în intervalul (a,b).

O a doua metodă pentru a arăta că ecuația $f(x) = 0$ are cel

puțin o rădăcină în intervalul (a,b) este de a arăta doar că f este continuă și $f(a)\cdot f(b) < 0$.

3. Consecințe:

1. Între două rădăcini ale unei funcții derivabile pe un interval există cel puțin o rădăcină a derivatei.

2. Între două rădăcini ale derivatei unei funcții derivabile pe un interval există cel mult o rădăcină a funcției.

Consecința 2. permite determinarea numărului rădăcinilor unei funcții pe un interval cu ajutorul rădăcinilor derivatei sale (șirul lui Rolle):

fie x_1 , x_2 , ... , x_n rădăcinile derivatei.

Atunci f are atîtea rădăcini reale simple cîte variații de semn sînt în șirul:

$$f(-\infty)\ ,\ f(x_1)\ ,\ f(x_2)\ ;\ \dots\ ,\ f(x_n)\ ,\ f(\infty)$$

(dacă avem $f(x_i) = 0$, atunci x_i este rădăcină multiplă)

EXERCIȚII:

I. Să se studieze aplicabilitatea teoremei lui Rolle pentru funcțiile:

1. $$f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + 1 & x \in [2,4] \\ -15 & x \in (4,5) \\ x^2 - 10x + 10 & x \in [5,7] \end{cases}$$

2. $$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & x \in [1,2] \\ 1 & x \in (-1,1) \\ x^2 + 2x + 2 & x \in [-2,-1] \end{cases}$$

3. $$f(x) = \begin{cases} \sin x & x \in \left[0\ ,\ 2\pi \right] \\ 1 & x \in \left(\frac{\pi}{2}\ ,\ 2\pi \right) \\ \cos x & x \in \left[2\pi\ ,\ \frac{9\pi}{2} \right] \end{cases}$$

Care este interpretarea geometrică a rezultatului obţinut ?

Indicaţie: 1. Se obţine $c \in [4,5]$. În orice punct din intervalul [4,5], graficul coincide cu tangenta la grafic.

II. 1. Fie $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. Să se arate că ecuaţia:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k \cdot \cos kx + b_k \cdot \sin kx) = 0$$

are cel puţin o suluţie în intervalul $(0,2\pi)$. (Manual)

2. Dacă $\sum_{i=0}^{n} \frac{i}{i+1} = 0$, atunci ecuaţia:

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0 = 0$ are cel puţin o rădăcină în intervalul (0,1).

3. (i) Dacă $a_1, a_2, \dots a_n \neq 0$, atunci ecuaţia:
$n \cdot a_n \cdot x^{n-1} + (n-1) \cdot a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1 = 0$ are cel puţin o rădăcină în intervalul (0,1).

(ii) În ce condiţii aceeaşi ecuaţie are cel puţin o rădăcină în intervalul (-1,0) ?

(iii) Aceeaşi întrebare pentru ecuaţiile:

$$a_{2n} \cdot x^{2n} + a_{2n-1} \cdot x^{2n-1} + \dots + a_0 = 0$$
$$a_{2n+1} \cdot x^{2n+1} + a_{2n} \cdot x^{2n} + \dots + a_0 = 0$$

pe intervalul (-1,1).

4. Fie $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabilă şi $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ rădăcini ale lui f. Să se arate că f′ are cel puţin $n-1$ rădăcini. (Manual)

<u>Consecinţe:</u>

a) O funcţie polinomială de grad n are cel mult n zerouri reale distincte.

b) Dacă toate rădăcinile unui polinom sunt reale şi distincte, aceeaşi proprietate o are şi derivata sa.

c) Dacă toate rădăcinile unui polinom sunt reale, atunci şi derivata sa are aceeaşi proprietate.

5. Fie $f(x) = (x^2 - 1)^n$. Să se arate că ecuaţia $f^{(n)}(x) = 0$ are n rădăcini distincte în intervalul $(-1,1)$.

6. Dacă f este de n ori derivabilă pe I şi are $n + 1$ rădăcini distincte pe I, atunci $f^{(n)}(x)$ are cel puţin o rădăcină pe I.

7. Fie $f,g:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue pe $[a,b]$, derivabile pe (a,b) cu $g(x) \neq 0$ şi $g'(x) \neq 0$ pe $[a,b]$, iar $\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f(b)}{g(b)}$. Să se arate că există $c \in (a,b)$ astfel încât:

$$\frac{f(c)}{g(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

8. Fie $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continuă pe (a,b) şi derivabbilă pe (a,b). Atunci între două rădăcini ale lui f există cel puţin o rădăcină a lui $\alpha \cdot f + f'$.

9. Dacă funcţiile derivabile f şi g au proprietatea:

$$f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x) = 0$$

pe un interval, atunci între două rădăcini ale lui se află o rădăcină a lui g şi reciproc.

Consecinţă: Dacă $f'(x) \cdot \cos x + f(x) \cdot \sin x \neq 0$, în orice interval de lungime mai mare decît π se află cel puţin o rădăcină a lui f.

10. Dacă $f,g:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt continue pe $[a,b]$, derivabile pe (a,b), $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ şi $f(a) = f(b) = 0$, atunci există $c_n \in (a,b)$ astfel încât:

$$\frac{f(c_n)}{g(c_n)} = \frac{1}{n}\cdot\frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}$$

REZOLVARI:

7. Egalitatea de demonstrat se mai poate scrie:

$$f(c)\cdot g'(c) - f'(c)\cdot g(c) = 0$$

Această egalitate apare în punctele c care sînt rădăcini ale derivatei lui $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, deci este suficient să demonstrăm că funcţia h îndeplineşte condiţiile teoremei lui Rolle pe $[a,b]$.

8. Ecuaţia $\alpha\cdot f(x) + f'(x) = 0$ provine din egalarea cu zero a derivatei funcţiei $F(x) = e^{\alpha x}f(x)$, deci este suficient să arătăm că F satisface condiţiile teoremei lui Rolle.

9. Fie x_1, x_2 rădăcini ale lui f. Prin ipoteză avem $g(x_1) \neq 0$ şi $g(x_2) \neq 0$. Dacă prin absurd, între x_1, x_2 nu se găseşte o rădăcină a lui g, înseamnă că funcţia $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ satisface condiţiile din teorema lui Rolle şi deci $h'(x)$ se anulează cel puţin într-un punct între x_1 şi x_2, ceea ce contrazice ipoteza.

10. $\exists\, c_n \in (a,b)$ $\quad \frac{f(c_n)}{g(c_n)} = \frac{1}{n}\cdot\frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}$ $\iff$

$\iff$ $\exists\, c_n \in (a,b)$ $\quad n\cdot f(c_n)\cdot g'(c_n) - g(c_n)\cdot f'(c_n) = 0$ $\iff$

$\iff$ ecuaţia: $n\cdot f(x)\cdot g'(x) - g(x)\cdot f'(x) = 0$ are cel puţin o rădăcină în (a,b) $\iff$ $h'(x) = 0$ are cel puţin o rădăcină în (a,b), unde $h(x) = \frac{f(x)}{g^{(n)}(x)}$.

Vom prezenta în cele ce urmează două metode pentru studiul rădăcinilor unei ecuaţii. Prima dintre acestea utilizează teorema lui Rolle, iar cealaltă este o consecinţă a faptului că orice funcţie

continuă are proprietatea lui Darboux.

Metode pentru studiul rădăcinilor unei ecuaţii

1. Utilizarea teoremei lui Rolle (interpretarea sa algebrică)

2. Utilizrea proprietăţii lui Darboux (dacă f are proprietatea lui Darboux (în particular dacă este continuă) pe $[a,b]$ şi: $f(a)\cdot f(b) \leq 0$, atunci f are o rădăcină în $[a,b]$).

Exemple:

1) Dacă $f:[a,b] \longrightarrow [a,b]$ este o funcţie continuă, atunci există $u,v \in [a,b]$ astfel incît $f(u) = u$ şi $f(v) = v$.
(Manual)

2) Fie $f:[0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie continuă astfel încât $f(0) = f(2\pi)$. Să se arate că există $c \in [0,\pi]$ astfel încât $f(c) = f(c + \pi)$.
(Manual)

Consecinta: Dacă un drumeţ pleacă dimineaţa din localitatea A şi ajunge seara în localitatea B, iar a doua zi plecă înapoi şi jungeîn A, să se arate că există un punct pe drumul dintre A şi B în care drumeţul a fost la aceeaşi oră în cele două zile de drum.

Indicatie: Dacă $S(t)$ este spaţiul parcurs de drumeţ, avem: $S(0) = S(24)$ şi deci există $t_o \in [0,12]$ astfel încât $S(t_o) = S(t_o + 12)$.

Astfel formulată problema,rezultatul pare surprinzător,dar ea este echivalentă cu a spune că doi drumeţi care pleacă unul din A către B şi celălalt din B către A,se întâlnesc pe drum.

3. Utilizarea şirului lui Rolle.

Exemplu: Să studiem natura rădăcinilor ecuației:

$$x^3 - 3x^2 + a = 0$$

a fiind un parametru real.

Raspuns: Rădăcinile derivatei sunt: $x' = 0$ și $x'' = 2$ și avem: $f(x') = a$ și $f(x'') = a - 4$. Rezultatele sunt cuprise in tabelul următor:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f(x)$	$-\infty$	a	$a - 4$	$+\infty$	Natura rădăcinilor
$a < 0$	$-$	$-$	$-$	$+$	o rădăcină reală $x_1 > 2$
$a = 0$	$-$	0	$-$	$+$	$x_1 = x_2 = 0$, $x_3 > 2$
$a \in (0,4)$	$-$	$+$	$-$	$+$	$x_1 \in (-\infty,0)$, $x_2 \in (0,2)$, $x_3 > 2$
$a = 4$	$-$	$+$	0	$+$	$x_1 < 0$, $x_2 = x_3 = 2$
$a > 4$	$-$	$+$	$+$	$+$	o rădăcină reală $x_1 < 0$

4. Metoda grafică. Ecuația $F(x,m) = 0$ se reduce la forma $f(x) = a$. Numărul rădăcinilor este egal cu numărul punctelor de intersecție dintre graficele: $y = f(x)$ și $y = m$.

Exemplu: $x^3 + mx^2 + 2mx + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = -\dfrac{x^3 + 1}{x(x + 2)}$.

Numărul rădăcinilor ecuației date este egal cu numărul punctelor de intersecție dintre graficele:

$$y = -\frac{x^3 + 1}{x(x + 2)} \quad \text{și} \quad y = m$$

5. Relațiile lui Viette.

EXemplu: Să se arate că ecuația:

$$x^4 + (a + 1)\cdot x^3 + (a^2 + \frac{a}{2} + 1)\cdot x^2 + b\cdot x + c = 0 \quad , \quad \text{cu} \quad a,b,c \in \mathbb{R}$$

are cel mult două rădăcini reale.

Raspuns: avem:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a - 1 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_3x_4 = a^2 + \frac{a}{2} + 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 = a^2 + 2a + 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2\cdot(x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_3x_4) = a^2 + 2a + 1$$

$\Leftrightarrow \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = -a^2 + a - 1 < 0$, deci ecuaţia are cel puţin două rădăcini complexe.

6. Utilizarea teoremei de medie.

Teoremă: Dacă $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann (deci mărginită), există $\mu \in [m,M]$ astfel incât:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \mu(b - a)$$

Exemplu: Fie $f:[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continuă şi astfel incât $2\int_0^1 f(x)\, dx = 1$. Să se arate că ecuaţia $f(x) = x$ are o rădăcină $x_0 \in (0,1)$.

Raspuns: $f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0$, deci notând: $h(x) = f(x) - x$ trebuie arătat că ecuaţia $h(x) = 0$ are o rădăcină in intervalul $(0,1)$. Avem: $\int_0^1 f(x)\, dx = 1$, $\Leftrightarrow 2\int_0^1 (h(x)+x)\, dx = 1$

$\Leftrightarrow \quad 2\int_0^1 h(x) = 0$. Dar: $\int_0^1 h(x) = \mu$, conform teoremei de medie, cu $\mu \in (m,M)$. Funcţia h fiind continuă, are proprietatea lui Darboux, deci pentru μ există $x_0 \in (0,1)$ astfel incât $\mu = h(x_0)$.

EXERCITII:

1. Ecuaţiile:

a) $x^4 - x^3 + x^2 + \alpha x + \beta = 0$

b) $x^4 - (\sin\alpha)\cdot x^3 + x^2 + \beta x + \gamma = 0$

c) $x^4 - \sqrt{2\alpha}\, x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 1 = 0$

nu pot avea toate rădăcinile reale dacă $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Indicație: a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 < 0$

b) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \sin^2\alpha - 2 < 0$

c) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$, $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 < 0$

2. Dacă $f:[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ este continuă și cu proprietatea $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}$, atunci ecuația $f(x) - \sin \pi x = 0$ are o rădăcină în $(0,1)$.

3. Dacă $f:[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ este continuă și cu proprietatea $6\int_0^1 f(x)\,dx = 2a + 3b + bc$, atunci ecuația $f(x) - ax^2 - bx - c = 0$ are o rădăcină în $(0,1)$.

4. Dacă $f:[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ este continuă și există $n > 1$ pentru care $\int_0^1 f(x)\,dx = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, ecuația:

$(1 - x)\cdot f(x) = 1 - x^n$ are o rădăcină în $(0,1)$.

Indicație: Se aplică teorema de medie funcției:

$h(x) = f(x) - (1 + x + \dots + x^{n-1})$

(C) TEOREMA LUI LAGRANGE (1736 - 1813)
(Teorema creșterilor finite)

1. <u>Enunț:</u> Fie $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă pe $[a,b]$ și derivabilă pe (a,b). Atunci există $c \in (a,b)$ astfel încât:

$$f(b) - f(a) = f'(c)\cdot(b - a)$$

2. <u>Interpretare geometrică și algebrică</u>

a) <u>Interpretare geometrică:</u> Dacă sunt îndeplinite condițiile

teoremei, există un punct $c \in (a,b)$ în care tangenta la grafic este paralelă cu coarda ce unește extremitățile graficului.

b) <u>Interpretare algebrică:</u> Dacă sunt îndeplinite condițiile teoremei, ecuația: $f'(x) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ are cel puțin o rădăcină în intervalul (a,b) .

3. <u>Corolarul teoremei lui Lagrange:</u> Dacă f este continuă pe un interval I și derivabilă pe $I \setminus \{x_0\}$ iar în x_0 există limita derivatei: $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = \lambda$, atunci f este derivabilă în x_0 și $f'(x_0) = \lambda$.

Acest corolar permite efectuarea studiului derivabilității unei funcții intr-un punct mult mai ușor decit cu ajutorul derivatelor laterale.

<u>Exemple:</u>

1. Să se studieze derivabilitatea funcției:

$$f(x) = \begin{cases} 2^{\frac{1}{x-1}} & x < 1 \\ \ln(x^2 - 2x + 2) & x \ge 1 \end{cases}$$

Rezolvare: În orice punct $x \ne 1$ funcția este derivabilă fiind exprimată prin funcții derivabile. Studiem derivabilitatea în $x = 1$ utilizând corolarul teoremei lui Lagrange:

- continuitatea în $x = 1$:

$$l_s(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} 2^{\frac{1}{x-1}} = 0$$

$$l_d(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \ln(x^2 - 2x + 2) = 0$$

$f(1) = \ln 1 = 0$, deci f este continuă pe $\mathbb{R}$ (și derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{1\}$).

- derivabilitatea . Pentru studiul derivabilității în $x = 1$, avem:

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(x-1)^2} \cdot 2^{\frac{1}{x-1}} \cdot \ln 2 & x < 1 \\ \dfrac{2(x-1)}{x^2 - 2x + 2} & x > 1 \end{cases}$$

(f' știm că există doar pa $\mathbb{R} - \{1\}$)

EXERCITII:

I. Să se studieze aplicabilitatea teoremei lui Lagrange și să se determine punctele intermediare c pentru:

1. $f(x) = \begin{cases} 2x - 2 & x \in [0,1) \\ x^2 + 1 & x \in [1,2] \\ 4x - 8 & x \in (2,3] \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} \sin x & x \in [0, \frac{\pi}{6}] \\ x^2 + \alpha \cdot x + \beta & x \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$

3. $f(x) = \left| \left(x - \frac{\pi}{2} \right)^3 \cdot \cos x \right|, \quad x \in [0,\pi]$

4. $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}, \quad x \in [0,n]$

5. $f(x) = \begin{cases} \left(e^{-\frac{1}{x^2}} \right)^{(n)} & x \in [-1,1], \quad x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Indicatie: 2. Condiția de continuitate în $x = \frac{\pi}{6}$ este: $\frac{\pi^2}{36} + \alpha \frac{\pi}{6} + \beta = \frac{1}{2}$, iar condiția de derivabilitate (corola-

rul teoremei Lagrange) este : $2\frac{\pi}{6} + \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Punctul c

este soluţia ecuaţiei: $f'(x) = \dfrac{f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0)}{\frac{\pi}{2} - 0} = 0$.

II. 1. Fie $f(x) = ax^2 + bx + c$. Să se aplice teorema creşterilor finite pe intervalul $[x_1,x_2]$, găsindu-se punctul c intermediar. Să se deducă de aici un mod de a construi tangenta la o parabolă într-un punct dat al ei.

2. Avem: $m \le f'(x) \le M$ pentru orice $x \in I$, dacă şi numai dacă:

$$m\cdot|x - y| \le |f(x) - f(y)| \le M\cdot|x - y| \quad \forall\, x,y \in I . \qquad (L1)$$

3. (Generalizarea teoremei lui Rolle). Dacă f este continuă pe [a,b] şi derivabilă pe (a,b), există $c \in (a,b)$ astfel încât:

$$\mathrm{sgn}\Big(f(b) - f(a) \Big) = \mathrm{sgn}\, f'(c) \qquad (L2)$$

4. Presupunând că f este de două ori derivabilă într-o vecinătate V a punctului a, să se arate că pentru h suficient de mic există $p,q \in V$ astfel încât:

a) $\dfrac{f(a + h) - f(a - h)}{2h} = f'(p)$

b) $\dfrac{f(a + h) - f(a - h) -2f(a)}{h^2} = f''(q)$

(Manual)

5. Fie $f:[0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă astfel încât $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$ şi fie $a > 0$ fixat. Aplicând teorema Lagrane pe fiecare interval $[a + n , a + n + 1]$, $n \in \mathbb{N}$, să se arate că există un şir $\left(x_n \right)_{n\in\mathbb{N}}$ având limita infinit şi astfel încât:

$$\lim_{x \to \infty} \sum_{i=0}^{n} f'\left(x_i \right) = - f(a)$$

6) Teorema creşterilor finite se mai poate scrie:

$$f(x + h) - f(x) = h.f'(x + ch) \quad \text{cu } c \in (0,1).$$

Să se aplice această formulă funcţiilor a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = x^3$, c) $f(x) = mx + n$ şi să se studieze valorile corespunzătoare punctului real c.

REZOLVARI:

1. $c = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, deci fiind dat punctul de abscisă c, pentru a construi tangenta în punctul $(c \,;\, f(c))$ al graficului considerăm două puncte simetrice faţă de c: $x_1 = c-\varepsilon$,$x_2=c+\varepsilon$. Tangenta trece prin punctul $(c \,,\, f(c))$ şi este paralelă cu coarda determinată de punctele $(x_1 \,,\, f(x_1))$ şi $(x_2 \,,\, f(x_2))$.

2. Necesitatea: Pentru $x = y$ (L1) este verificată, iar pentru $x \neq y$ avem: (L1) $\Leftrightarrow$ $m \leq \left| \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq M$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $m \leq f'\left(c_{x_j}\right) \leq M$ inegalităţi adevărate datorită ipotezei.

Reciproc, fie $x \in I$ oarecare. Pentru $x \neq y$ (L1) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $m \leq \left| \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq M$ şi făcând pe y să tindă la x, avem: $m \leq f'(x) \leq M$.

3. Distingem trei cazuri: (1) $f(a) < f(b)$. În acest caz trebuie să arătăm că există $c \in (a,b)$ astfel încât $f'(c) > 0$. Dacă prin absurd, am avea $f'(c) \leq 0$ pe (a,b), ar rezulta că f este descrescătoare, deci $f(a) > f(b)$.

(2) $f(a) = f(b)$. Ne aflăm in condiţiile teoremei lui Rolle.

(3) Cazul $f(a) > f(b)$ este. analog cu (1).

4. a) Se aplică teorema lui Lagrange lui f pe $[a - h \,,\, a + h]$. b) Se aplică de două ori teorema lui Lagrange funcţiei $g(x) = f(a + x) - f(x)$ pe intervalul $[a - h \,,\, a]$.

6. a) $c = 1/2$, c) se obține mh = mh, deci c nu se poate determina.

(D) TEOREMA LUI CAUCHY (1789 - 1857)

1. Enunț: Fie $f,g:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue pe $[a,b]$ și derivabile pe (a,b) astfel încât $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$. Atunci există $c \in (a,b)$ astfel încât:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

2. Interpretare geometrică și algebrică

a) Interpretare geometrică: În condițiile teoremei există un punct în care raportul pantelor tangentelor la cele două grafice este egal cu raportul pantelor corzilor ce unesc extremitățile graficelor.

b) Interpretare algebrică: În condițiile teoremei, ecuația: $f'(x)\big(g(b) - g(a)\big) - g'(x)\big(f(b) - f(a)\big) = 0$ are cel puțin o rădăcină în (a,b).

EXERCITII:

I. Să se studieze aplicabilitatea teoremei lui Cauchy și să se determine punctul intermediar c pentru:

1. $f(x) = \ln x$, $g(x) = \frac{e}{x}$, $f,g:[1,e] \longrightarrow \mathbb{R}$

2. $f(x) = \ln x$, $g(x) = 2x - 1$, $f,g:[1,e] \longrightarrow \mathbb{R}$

3. $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $f,g:\left[\frac{\pi}{6} , \frac{\pi}{2}\right]$ (Manual)

4. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - x^2 + 1 & x \in [1,3] \\ -x + \frac{4}{3} & x \in [0,1] \end{cases}$

$g(x) = x^2 + 1$, $f,g:[0,3] \longrightarrow \mathbb{R}$

II. 1. Dacă f are derivate de orice ordin pe $[a,b]$, aplicînd formula lui Cauchy funcţiilor:

a) $g(x) = f(x)$, $h(x) = b - x$, să se arate că există $c \in (a,b)$ astfel incît $f(b) = f(a) + (b - a)f'(c)$.

b) $g(x) = f(x) + (b - x)f'(x)$, $h(x) = (b - x)^2$, să se arate că există $c \in (a,b)$ astfel încât:

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(a) + \frac{(b - a)^2}{2!}f''(c)$$

c) $g(x) = f(x) + \frac{b - x}{1!}f'(x) + \frac{(b - x)^2}{2!}f''(x)$,

$h(x) = (b - x)^3$, să se arte că există $c \in (a,b)$ astfel încât:

$$f(b) = f(a) + \frac{(b - a)}{1!}f'(a) + \frac{(b - a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(b - a)^3}{3!}f'''(c)$$

d) $g(x) = f(a) + \frac{b - a}{1!}f'(x) + \frac{(b - x)^2}{2!} + \dots$

$\dots + \frac{(b - x)^n}{n!}f^{(n)}(x)$, $g(x) = (b - x)^{n+1}$, să se arate că există $c \in (a,b)$ astfel încât:

$$f(b) = f(a) + \frac{b - a}{1!}f'(a) + \frac{(b - a)^2}{2!}f''(a) + \dots$$

$$\dots + \frac{(b - a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b - a)^{n+1}}{(n + 1)!}f^{(n+1)}(c)$$

2. Aplicând concluzia de la punctul b), să se arate că nu există funcţii $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de două ori derivabile astfel încât:

$$f(x) \ge 0 \quad \text{şi} \quad f''(x) < 0$$

(nu există funcţii nenegative şi strict concave pe întreaga axă reală).

REZOLVARE:

2. Din $f''(x) < 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deducem că f' este

strict descrescătoare şi deci nu putem avea $f'(x) = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Aşadar, există $x_o \in \mathbb{R}$ astfel încât $f'(x_o) \neq 0$.

Dar atunci din relaţia:

$$f(x) = f(x_o) + (x - x_o)f'(x_o) + \frac{(x - x_o)^2}{2} f''(c)$$

rezultă $f(x) - f(x_o) < (x - x_o)f'(x_o)$ (C1)

Avem două situaţii: (1) dacă $f'(x_o) > 0$, făcând pe x să tindă la $-\infty$ în (C1) avem:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - f(x_o) \right) = \lim_{x \to -\infty} (x - x_o)f'(x_o) = -\infty$$

prin urmare $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ — contradicţie .

(2) dacă $f'(x_o) < 0$ obţinem aceeaşi contradicţie dacă facem pe x să tindă la $+\infty$.

6. EGALITATI SI INEGALITATI

EGALITATI

Se ştie că dacă derivata unei funcţii este egală cu zero pe un interval, funcţia respectivă este constantă pe acel interval. Această observaţie permite demonstrarea unor egalităţi de forma:

$$f(x) = g(x) + C$$

sau, în particular,

$$f(x) = g(x) \quad \text{şi} \quad f(x) = C = \text{constant}$$

Într-adevăr, $f(x) = g(x) + C \iff f(x) - g(x) = C$ şi pentru demonstrarea acestei egalităţi este suficient să demonstrăm că: $\left(f(x) - g(x) \right)' = 0$.

Observatie: Dacă derivata este egală cu zero pe o reuniune de intervale disjuncte, este posibil să difere constanta de la un interval la altul.

Pentru determinarea constantei C, putem utiliza două metode:

1. **Calculăm expresia** $f(x) - g(x)$ într-un punct convenabil ales din intervalul considerat.

2. **Dacă nu este posibil să** aplicăm metoda precedentă, putem calcula $\lim_{x \to x_0} \left(f(x) - g(x) \right)$, x_0 fiind de asemenea un punct convenabil ales (un capăt de interval).

Exemplu: Să se arate că avem:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1 - x}{1 + x} = \begin{cases} -\dfrac{3\pi}{4} & x \in (-\infty , -1) \\ \dfrac{\pi}{4} & x \in (-1 , \infty) \end{cases}$$

Rezolvare: Pentru $h(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1 - x}{1 + x}$ avem $h'(x) = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, domeniu ce este o reuniune de intervale disjuncte. Calculăm valoarea constantei pe fiecare interval.

(1) Pentru $x > -1$, alegem punctul $x = 0$ în care putem face uşor calculele: $h(0) = \operatorname{arctg}(0) + \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$.

(2) Pentru $x < -1$ nu găsim un punct în care să putem calcula uşor valoarea lui h, dar observăm că putem calcula:

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} h(x) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{4}.$$

INEGALITATI

<u>Metoda 1:</u> Utilizarea teoremei lui Lagrange sau a teoremei lui Cauchy.

În unele inegalități poate fi pusă în evidență o expresie de

forma: $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, f şi punctele a,b fiind convenabil alese. În acest caz se poate utiliza teorema lui Lagrange pentru demonstrarea inegalităţii respective, înlocuind expresia:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

din inegalitate, cu $f'(c)$. Noua formă a inegalităţii se demonstrează ţinând cont de faptul că $a < c < b$ şi de monotonia lui f'.

Un procedeu asemănător poate fi aplicat dacă în inegalitate se poate pune în evidenţă o expresie de forma $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$, utilizând teorema lui Cauchy.

EXEMPLE:

1. Utilizând teorema lui Lagrange, să se arate că:

$$\frac{b - a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b - a}{a}, \quad \text{dacă} \quad 0 < a < b.$$

Rezolvare: Parcurgem următoarele etape:

(a) Punem în evidenţă o expresie de forma $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ observând că $\ln\dfrac{b}{a} = \ln b - \ln a$ şi împăţind cu $b - a$. Inegalitatea devine:

$$\frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{a}$$

(b) aplicăm teorema lui Lagrange funcţiei $f(x) = \ln x$ pe intervalul $[a,b]$. Există $c \in (a,b)$ astfel încât:

$$\frac{\ln b - \ln a}{b - a} = f'(c) = \frac{1}{c}$$

(c) inegalitatea devine:

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$$

Această nouă formă a inegalităţii se demonsrează ţinând cont de faptul că $a < c < b$ şi $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ este descrescătoare.

2. Utilizând teorema lui Lagrange, să se arate că $e^x > 1 + x$ pentru orice $x \neq 0$.

Rezolvare:

Pentru a folosi teorema lui Lagrange, căutăm un interval $[a,b]$ şi o funcţie astfel încât în inegalitatea noastră să putem pune în evidenţă raportul $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Pentru aceasta observăm că dacă $x \neq 0$, avem două situaţii:

(1) $x > 0$. În acest caz putem considera intervalul $[0,x]$.

(a) Punem în evidenţă în inegalitatea dată o expresie de forma: $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ observând că dacă $x > 0$, avem $e^x > 1 + x$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{e^x - 1}{x} > 1$.

(b) Aplicăm teorema lui Lagrange funcţiei $f(t) = e^t$ pe intervalul $[0,x]$. Există $c \in (0,x)$ astfel încât $\dfrac{e^x - 1}{x} = f'(c) = e^c$.

(c) Inegalitatea devine: $e^c > 1$.

Această formă a inegalităţii se demonsrează ţinând cont că: $0 < c < x$, iar derivata $f'(x) = e^x$ este crescătoare (deci $e^0 < e^c$).

(2) Dacă $x < 0$ demonstraţia se face analog.

<u>Metoda 2:</u> Metoda minimului

Această metodă se bazează pe observaţia că dacă x_o este un punct de minim global (cel mai mic minim) pentru o funcţie h pe un domeniu $\mathbb{D}$ şi dacă $h(x_o) \geq 0$ (cea mai mică valoare a lui h este nenegativă), atunci $h(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{D}$ (toate valorile lui h sînt nenegative). Putem demonstra deci inegalităţi

de forma: $f(x) \geq g(x)$ adică $f(x) - g(x) \geq 0$, cu alte cuvinte, de forma: $h(x) \geq 0$.

Exemplu: Utilizând metoda minimului, să se arate că $e^x > 1 + x$ pentru orice $x \neq 0$.

Rezolvare: Pentru a utiliza această metodă procedăm astfel:

(a) Scriem inegalitatea sub forma: $h(x) \geq 0$:

$$e^x > 1 + x \iff e^x - x - 1 > 0$$

(b) Fie $h(x) = e^x - 1 - x$. Cu ajutorul tabelului de variaţie calculăm minimul global (cel mai mic minim) al lui h :

x	$-\infty$							0								$+\infty$
$h'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$h(x)$		$\searrow$		$\searrow$		$\searrow$		0	$\nearrow$			$\nearrow$			$\nearrow$	

Din tabel se observă că h are un singur minim, în $x = 0$, deci acesta este şi minimul global. Valoarea sa este $h(0) = 0$. Deci pentru $x \neq 0$, avem $h(x) > 0$.

Metoda 3: (Inegalităţi pentru integrale, fără calculul integralelo

Pentru demonstrarea unei inegalităţi de forma:

$$\alpha \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \beta$$

fără a calcula integrala, se foloseşte observaţia că dacă m, respectiv M, sunt valorile de minim şi de maxim global ale lui f pe intervalul [a,b], avem:

$$m \leq f(x) \leq M \quad \text{pentru orice} \quad x \in [a,b]$$

şi deci integrând, obţinem:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

deci pentru demonstrarea inegalităţii propuse, mai trbuie demonstrate inegalităţile (numerice):

$$\alpha \le m(b-a) \quad \text{şi} \quad M(b-a) \le \beta$$

Exemplu: Să se arate că:

$$2\sqrt{e} \le \int_0^1 e^{x^2}dx + \int_0^1 e^{1-x^2}dx \le 1+e$$

Rezolvare: (a) Inegalitatea pote fi scrisă sub forma:

$$2\sqrt{e} \le \int_0^1 \left[e^{x^2} + e^{1-x^2} \right] dx \le 1+e$$

(b) Cu ajutorul tabelului de variaţie calculăm minimul şi maximul global al funcţiei $f(x) = e^{x^2} + e^{1-x^2}$ pe intervalul [0,1] :

x	0				$\frac{1}{\sqrt{2}}$			1
$f'(x)$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$1+e$	$\searrow$	$\searrow$		$2\sqrt{e}$	$\nearrow$	$\nearrow$	$1+e$

Avem deci, $m = 2\sqrt{e}$ şi $M = 1 + e$.

(c) Integrăm inegalităţile $m \le f(x) \le M$ pe intervalul [a,b] şi obţinem:

$$\int_0^1 2\sqrt{e}\,dx \le \int_0^1 f(x)\,dx \le \int_0^1 (1+e)\,dx \iff$$

$$\iff 2\sqrt{e} \le \int_0^1 f(x)\,dx \le 1+e .$$

Metoda 4: Utilizarea inegalității din definiția funcțiilor convexe (concave)

Fie I un interval pe axa reală.

Definiție: Funcția $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ este convexă pe I dacă între orice două puncte $x_1, x_2 \in I$ graficul lui f se află sub coarda ce unește punctele de abscise x_1 și x_2.

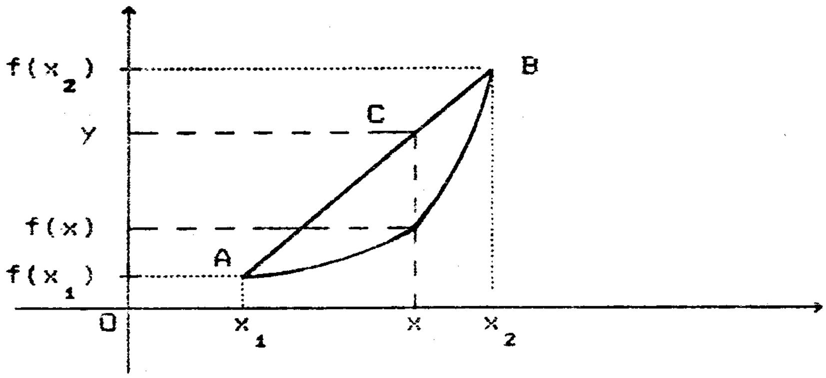


Fig. 6.1

Cu notațiile din desenul alăturat, această condiție se exprimă prin inegalitatea: $f(x) \le y$.

Pentru a explicita pe x și pe y, observăm că:

1. x este în intervalul $[x_1, x_2]$ dacă și numai dacă se poate scrie sub forma:

$$x = \alpha \cdot x_1 + (1 - \alpha) \cdot x_2 , \quad \text{cu} \quad \alpha \in [0,1] \qquad \text{(E.I.1)}$$

Intr-adevăr, dacă $x \in [x_1, x_2]$ este suficient să luăm $\alpha = (x-x_2)/x_1-x_2)$ pentru a avea satisfăcută egalitatea dorită.

Reciproc, dacă x are exprimarea din (E.I.1), pentru a arăta că $x \in [x_1, x_2]$ trebuie verificat sistemul de inegalități:

$$\begin{cases} \alpha\cdot x_1 + (1-\alpha)\cdot x_2 \geq x_1 \\ \alpha\cdot x_1 + (1-\alpha)\cdot x_2 \leq x_2 \end{cases}$$

Prima inegalitate este echivalentă cu $\alpha \leq 1$, iar a doua inegalitate este echivalentă cu $\alpha \leq 0$.

Observație: Condiția $\alpha \in [0,1]$ din (E.I.1) este deci esențială.

Inegalitatea din definiția convexității devine:

$$f\left(\alpha\cdot x_1 + (1-\alpha)\cdot x_2\right) < y$$

2. Pentru a-l exprima și pe y observăm că:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{CA}{CB} = \frac{y - f(x_1)}{f(x_2) - y}$$

deci:

$$\frac{\alpha\cdot x_1 + (1-\alpha)\cdot x_2 - x_1}{x_2 - \alpha\cdot x_1 - (1-\alpha)\cdot x_2} = \frac{y - f(x_1)}{f(x_2) - y}$$

de unde rezultă:

$$y = \alpha\cdot f(x_1) + (1-\alpha)\cdot f(x_2)$$

Înlocuind pe x și pe y, obținem:

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ este convexă <=>

$$\Leftrightarrow \left[\forall\, x_1, x_2 \in I \quad \forall\, \alpha \in [0,1] \quad f\left(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\right) < \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)\right]$$

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ se spune că este concavă dacă pentru orice $x_1, x_2 \in I$, între punctele de abscise x_1 și x_2 graficul funcției f este deasupra corzii ce unește aceste puncte, adică:

$$\forall\, x_1, x_2 \in I \quad \forall\, \alpha \in [0,1] \quad f\left(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\right) > \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$$

Se ştie că putem verifica convexitatea şi concavitatea unei funcţii de două ori derivabile pe un interval cu ajutorul derivatei a doua:

$f''(x) > 0$ pe I <=> f convexă pe I

$f''(x) < 0$ pe I <=> f concavă pe I

Utilizând cele două moduri de exprimare a convexităţii putem formula şi demonstra unele inegalităţi.

Exemplu: Să se arate că pentru orice x_1 şi x_2 din $\mathbb{R}$ avem:

$$e^{\frac{x_1 + x_2}{2}} < \frac{e^{x_1} + e^{x_2}}{2}$$

Rezolvare: Funcţia $f(x) = e^x$ este convexă pe $\mathbb{R}$ ($f''(x) > 0$), deci:

$$\forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}\quad \forall\ \alpha \in (0,1)\quad f\left(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\right) < \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$$

de unde pentru $\alpha = \frac{1}{2}$ obţinem inegalitatea din enunţ.

EXERCITII:

I. Să se arate că:

1. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ pentru orice $x \in [-1,1]$

2. $\text{arcctg } x + \text{arctg } \frac{1}{x} = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{\pi}{2} & x \in (0, \infty) \end{cases}$

3. $2\text{arctg } x + \arcsin \frac{2x}{1 + x^2} = \begin{cases} \pi & x \in [1, \infty) \\ -\pi & x \in (-\infty, -1] \end{cases}$

4. $\arcsin \frac{\cos\sqrt{x} + \sqrt{3}\cdot\sin\sqrt{x}}{2} - \sqrt{x} = \frac{\pi}{6}$, $x \in [0, 1-\frac{\pi}{6}]$

5. Pentru intervalele $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ să considerăm funcţiile con-

tinue şi injective $f:I_1 \longrightarrow \mathbb{R}$, $g:I_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ şi constanta c în interiorul lui $f(I_1)$. Din condiţia $f(u(x)) = c + g(x)$ rezultă $u(x) = f^{-1}(c + g(x))$ pentru orice x care îndeplineşte condiţia $c + g(x) \in f(I_1)$. Utilizînd această observaţie, să se construiască egalităţi de forma $h(x) = c$ pentru:

(a) $f(x) = \arccos x$, $g(x) = x^2$

(b) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $g(x) = 3x + 2$

(c) $f(x) = e^{x+1}$, $g(x) = \operatorname{tg} x$

Raspuns: (a) Avem $f:[-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f([-1,1]) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $g:[0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$. Determinăm funcţia u din condiţia: $f(u(x)) = c + g(x)$ care devine $\arccos u(x) = c + x^2$, deci $u(x) = \cos(c + x^2)$. Pentru $c = \frac{\pi}{4}$ de exemplu avem $u(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos x^2 - \sin x^2\right)$, iar din condiţia: $\frac{\pi}{4} + x^2 \in [-1,1]$ deducem $x \in \left[-\sqrt{1 - \frac{\pi}{4}}, \sqrt{1 - \frac{\pi}{4}}\right]$ şi deci avem:

$$\arccos \frac{\sqrt{2}\left(\cos x^2 - \sin x^2\right)}{2} - x^2 = \frac{\pi}{4} ,$$

$$x \in \left[-\sqrt{1 - \frac{\pi}{4}}, \sqrt{1 - \frac{\pi}{4}}\right]$$

II. Utilizînd teorema lui Lagrange, să se demonstreze inegalităţile:

1. $\frac{b - a}{\sin^2 b} < \operatorname{ctg} a - \operatorname{ctg} b < \frac{b - a}{\sin^2 a}$, $[a,b] \subset \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

2. $\frac{b - a}{\sin^2 a} < \operatorname{ctg} a - \operatorname{ctg} b < \frac{b - a}{\sin^2 b}$, $[a,b] \subset \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

3. $\frac{x + 1}{x + 2} < \ln(x + 2) < x + 1$, $x > -1$

4. $e^{\frac{x_1 + x_2}{2}} < \dfrac{e^{x_1} + e^{x_2}}{2}$, $\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

5. $\dfrac{1}{n + 1} < \ln\left(1 + \dfrac{1}{n} \right) < \dfrac{1}{n}$, $n > 1$

6. Utilizând teorema lui Cauchy aplicată funcțiilor:

$f(t) = (1 + t)\ln(1 + t)$, $g(t) = \operatorname{arctg} t$, $f,g:[0,x] \longrightarrow \mathbb{R}$

să se arate că $\ln(1 + x) > \dfrac{\operatorname{arctg} x}{1 + x}$, pentru $x > 0$.

III. Utilizând metoda minimului să se demonstreze inegalitățile:

1. $2 \leqslant 2x \cdot \arcsin x + 2\sqrt{1 + x^2} - x^2 < \pi - 1$, $x \in (-1,1)$

2. $-3 \leqslant 2\cos x - \cos 2x \leqslant \dfrac{3}{2}$, $x \in \mathbb{R}$

3. $\ln\left(1 + 2x + 2x^2 \right) \geqslant -\dfrac{1}{2}$, $x \in \mathbb{R}$

4. $x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x < x$, $x > 0$

5. $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x$, $x > 0$

6. $\sin x \geqslant \dfrac{x}{x + 1}$, $x \in \left[0 , \dfrac{\pi}{2} \right]$

7. $2\left(1 + x^{n+1} \right)^n \geqslant \left(1 + x^n \right)^{n+1}$, $x > 0$, $n \in \mathbb{N}$

IV. Fără a calcula integralele, să se arate că:

1. $\dfrac{1}{3} \leqslant \displaystyle\int_4^7 \frac{x - 3}{x + 5}\, dx \leqslant 1$

2. $1 \leqslant \displaystyle\int_0^1 e^{x^2} dx \leqslant e$

3. $\dfrac{16}{3} \leqslant \displaystyle\int_4^6 \frac{x^2}{x + 2}\, dx \leqslant 9$

4. $\sqrt{10} \leq \int_{-4}^{-3} \sqrt{x^2 + 1}\, dx \leq \sqrt{17}$

5. $0 \leq \int_{-\frac{1}{2}}^{0} x \ln\left(1 + x^2 \right) dx \leq \frac{1}{4} \ln \frac{4}{3}$

6. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\sin x}\, dx < \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{e} \right)$

7. $\int_{0}^{\ln \pi} \sin e^{x}\, dx < \pi - 1$

V. Fără a calcula integrala, să se arate care din următoarele integrale are valoare mai mare:

1. $\int_{1}^{2} \ln(1 + x)\, dx$ sau $\int_{1}^{2} \frac{x}{x + 1}\, dx$

2. $\int_{2}^{10} x \cdot \operatorname{arctg} x\, dx$ sau $\int_{2}^{10} \ln\left(1 + x^2 \right) dx$

3. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n} x\, dx$ sau $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x\, dx$

Indicație: Utilizând metoda minimului se demonstrează inegalități de forma $f_1(x) \leq f_2(x)$ sau $f_1(x) \geq f_2(x)$ pe intervalele considerate. Integrăm apoi inegalitatea obținută.

VI. 1. Dacă $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ este convexă, atunci pentru orice $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$, avem inegalitatea (lui Jensen):

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n}$$

(Manual)

2. Utilizând inegalitatea lui Jensen aplicată funcției con-

vexe $f(x) = e^x$, să se demonstreze inegalitatea mediilor:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

3. Să se arate că pentru orice $x_1, x_2, \ldots x_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ avem:

$$\sin \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \frac{\sin x_1 + \sin x_2 + \ldots + \sin x_n}{n}$$

$$\cos \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \frac{\cos x_1 + \cos x_2 + \ldots + \cos x_n}{n}$$

Care sunt domeniile maxime ce conțin pe zero, în care au loc aceste inegalități ? Dați exemple de alte domenii, ce nu conțin originea și în care au loc inegalitățile de mai sus. În ce domenii au loc inegalitățile inverse ?

4. Utilizând concavitatea funcției logaritmice demonstrați că pentru orice $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ avem:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \leqslant \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^n$$

5. Arătați că funcția $f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha > 1$, $x > 0$ este convexă. Utilizând această proprietate arătați că pentru orice numere nenegative $x_1, x_2, \ldots, x_n$ are loc inegalitatea:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^{\alpha} \leqslant n^{\alpha-1}(x_1^{\alpha} + x_2^{\alpha} + \ldots + x_n^{\alpha})$$

6. Aplicând inegalitatea lui Jensen funcției $f(x) = x^2$ să se arate că pentru orice $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, avem:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 \leqslant n \cdot (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2).$$

Ce inegalitate analoagă se poate deduce din funcția convexă

$f(x) = x^3$, pentru $x > 0$? Dar din funcția concavă $f(x) = x^3$, pentru $x \leq 0$?

7. Aplicând inegalitatea lui Jensen pentru funcția convexă $f(x) = \frac{1}{x}$, pentru $x > 0$, arătați că dacă:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

este un polinom cu toate rădăcinile reale și pozitive, avem: $n^2 \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} > \frac{a_1}{a_0}$. Ce se poate spune dacă polinomul are toate rădăcinile reale și negative ?

REZOLVARI:

2. Comparând membrul drept al inegalității de demonstrat cu membrul drept al inegalității lui Jensen, deducem că punctele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se determină din condițiile:

$$f(x_1) = a_1 , \; f(x_2) = a_2 , \; \ldots , \; f(x_n) = a_n$$

Avem:

$$e^{x_1} = a_1 \;\Rightarrow\; x_1 = \ln a_1 \quad \text{și, în general,} \quad x_i = \ln a_i$$

Cu aceste puncte inegalitatea lui Jensen, pentru $f(x) = e^x$, devine:

$$e^{\frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \ldots + \ln a_n}{n}} < \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

Făcând calculele în membrul sting, se obține inegalitatea mediilor .

3. Pe intervalul $\left[0 , \frac{\pi}{2}\right]$ funcțiile $\sin x$ și $\cos x$ sunt concave. Cel mai mare interval ce conține originea și în care este este concavă $\sin x$ este intervalul $[0,\pi]$. Pe $[\pi,2\pi]$ de exemplu aceeași funcție este convexă, deci inegalitatea din enunț se schimbă.

7. P R I M I T I V E

CONEXIUNI CU ALTE NOTIUNI SPECIFICE FUNCTIILOR

Definiție: | Funcția $f:I \longrightarrow \mathbb{R}$ are primitive pe intervalul I dacă există o funcție $F:I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabilă şi $F'(x) = f(x)$ pe I.

Se ştie că două primitive diferă printr-o constantă:

$$F_1(x) = F_2(x) + C$$

Mulțimea tuturor primitivelor se numeşte integrala nedefinită a funcției f şi se notează cu:

$$\int f(x)\,dx$$

Pentru a putea enunța metoda prin care se poate arăta că o funcție are primitive şi metoda pentru a arăta că o funcție nu are

primitive , amintim o parte dintre legăturile care există între principalele noțiuni de analiză matematică studiate în liceu, relativ la funcții:

1. LIMITA
2. CONTINUITATEA
3. DERIVABILITATEA
4. PROPRIETATEA LUI DARBOUX
5. PRIMITIVA
6. INTEGRALA

Legăturile între aceste noțiuni sunt date de următoarele proprietăți:

P_1) Orice funcție continuă intr-un punct x_0 are limită în acest punct: $C \longrightarrow L$

P_2) Orice funcție derivabilă într-un punct x_0 este continuă în acest punct: $D \longrightarrow C$

P_3) Orice funcție continuă pe $[a,b]$ are proprietatea lui Darboux pe $[a,b]$: $C \longrightarrow \text{Darb.}$

P_4) Orice funcție continuă pe $[a,b]$ are primitive pe $[a,b]$:

$$C \longrightarrow P$$

P_5) Orice funcție continuă pe $[a,b]$ este integrabilă pe $[a;b]$:

$$C \longrightarrow I$$

P_6) Orice funcție care are primitive pe $[a,b]$ are proprietatea lui Darboux pe $[a,b]$: $P \longrightarrow \text{Darb.}$

P_7) Dacă o funcție are proprietatea lui Darboux pe $[a,b]$, atunci în orice punct x_0 în care limita (limita laterală) există, ea este egală cu $f(x_0)$.

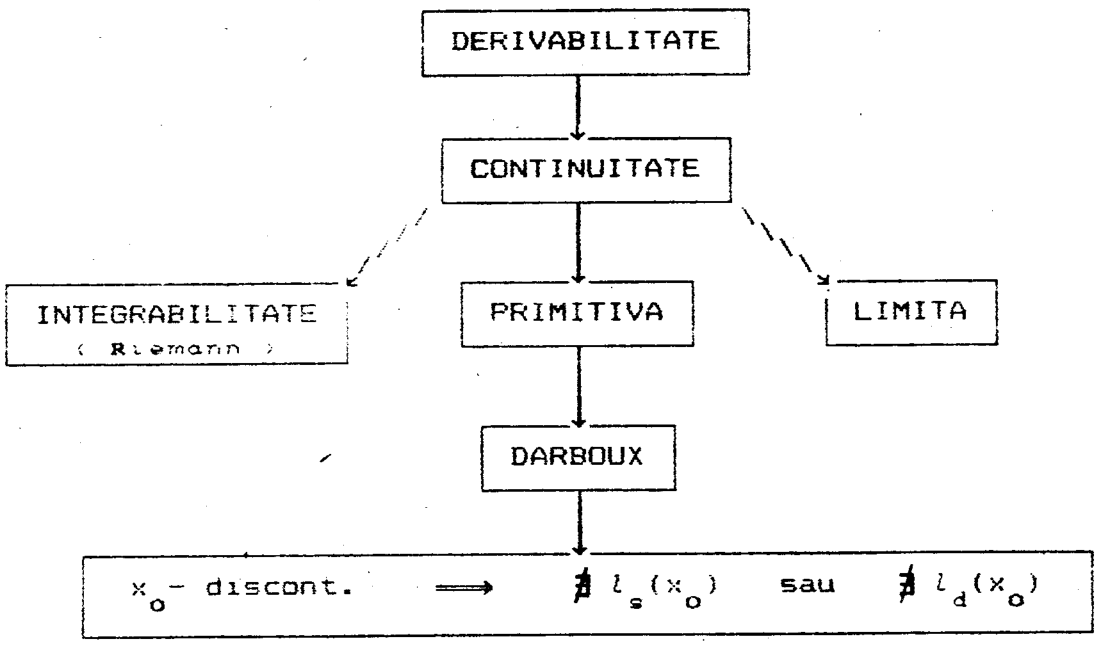
Consecințe: 1. O funcție cu proprietatea lui Darboux (deci o funcție care admite primitive) nu poate avea într-un punct x_o limită (limită laterală) infinită.

Funcțiile pentru care cel puțin o limită laterală este infinită sau diferă de $f(x_o)$ nu au primitive .

2. Dacă f are proprietatea lui Darboux pe [a,b] și x_o este un punct de discontinuitate, CEL PUȚIN O LIMITA LATERALA NU EXISTA.

Darb. + x_o discont. ======> $\nexists\, l_s(x_o)$ sau $\nexists\, l_d(x_o)$

Datorită implicațiilor de mai sus, putem forma tabloul:



OBSERVAȚIE: Dacă x_o este un punct de discontinuitate pentru f, este posibilă una din următoarele situații:

(1) limitele laterale există și sunt finite

(2) o limită laterală este finită, cealaltă este infinită

(3) ambele limite laterale sunt infinite

(4) o limită laterală este infinită, cealălaltă nu există

(5) o limită laterală este finită, cealălaltă nu există

(6) ambele limite laterale nu există

DINTRE TOATE FUNCŢIILE DISCONTINUE ÎN CEL PUŢIN UN PUNCT, SINGURELE CARE EVENTUAL AU PRIMITIVE SUNT ACELEA PENTRU CARE CEL PUŢIN O LIMITA LATERALA NU EXISTA (IAR CEALALTA, DACA EXISTA, ESTE FINITA).

De asemenea, să observăm că deşi în cazul (1) funcţia nu are primitive pe $[a,b]$ (nu are proprietatea lui Darboux) totuşi, dacă în plus limitele laterale sunt egale, atunci f are primitive pe $[a,b] \setminus \{x_0\}$, prin intermediul funcţiei f_p - prelungirea prin continuitate a restricţiei lui f la domeniul $[a,b] \setminus \{x_0\}$.

Exemplu: $f(x) = \begin{cases} a & x \leq 0 \\ \sin\frac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$ are proprietatea lui Darboux pentru orice $a \in [-1,1]$, dar nu are primitive dacă $a \neq 0$.

Într-adevăr, presupunând prin absurd că f are primitive, fie F o primitivă a sa. Atunci F trebuie să fie de forma:

$$F(x) = \begin{cases} a\cdot x + c_1 & x \leq 0 \\ \int \sin\frac{1}{x}dx + c_2 & x > 0 \end{cases}$$

Pentru a calcula $\int \sin\frac{1}{x}dx$ observăm că $\sin\frac{1}{x}$ provine din derivarea funcţiei $x^2\cos\frac{1}{x}$. Într-adevăr,

$$\left(x^2\cos\frac{1}{x} \right)' = 2x\cdot\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}$$

deci: $$\sin\frac{1}{x} = \left(x^2\cos\frac{1}{x} \right)' - 2x\cdot\cos\frac{1}{x} \quad \text{şi:}$$

$$\int \sin\frac{1}{x}dx = \int\left(x^2\cos\frac{1}{x} \right)'dx - 2\int x\cdot\cos\frac{1}{x}dx =$$

$$= x^2\cos\frac{1}{x} - 2\int x\cos\frac{1}{x}dx .$$

Funcţia $g(x) = x\cos\frac{1}{x}$ are primitive pe $(0,\infty)$, deoarece este continuă pe acest interval, dar nu are primitive pe $[0,\infty)$ (ne interesează ca intervalul să fie închis la zero pentru a putea studia continuitatea şi derivabilitatea lui F).

Observăm că deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = 0$, putem considera prelungirea sa prin continuitate:

$$g_p(x) = \begin{cases} x\cdot\cos\frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Această funcţie fiind continuă pe $[0,\infty)$, are primitive pe acest interval. Fie G una dintre aceste primitive. Atunci:

$$\int \sin\frac{1}{x}dx = x^2\cos\frac{1}{x} - 2\cdot G(x) \quad \text{şi:}$$

$$F(x) = \begin{cases} \alpha\cdot x + C_1 & x \leqslant 0 \\ x^2\cos\frac{1}{x} - 2\cdot G(x) + C_2 & x > 0 \end{cases}$$

Punem condiţia ca F să fie continuă în $x_0 = 0$. Avem:

$$F(0) = l_s(0) = C_1 , \quad l_d(0) = -2\cdot G(0) + C_2 ,$$

deci trebuie să avem $C_2 = C_1 + 2\cdot G(0)$ şi atunci pentru primitivă obţinem următoarea formă:

$$F(x) = \begin{cases} a \cdot x + C_1 & x < 0 \\ x^2 \cos \frac{1}{x} - 2 \cdot G(x) + 2 \cdot G(0) + C_1 & x > 0 \end{cases}$$

Punem condiţia ca F să fie derivabilă în zero:

$$F'_s(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{F(x) - F(0)}{x} = a ,$$

$$F'_d(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x^2 \cos \frac{1}{x} - 2G(x) + 2G(0) + C_1 - C_1}{x}$$

$= -2 \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{G(x) - G(0)}{x} = -2G'(0)$ deoarece G este derivabilă în zero.Avem $G'(0) = g_p(0) = 0$ (G este o primitivă a lui g_p),deci $F'_d(0) = 0$. Prin urmare F nu este derivabilă în zero dacă $a \neq 0$.

Observatie: Pentru studiul derivabilităţii am menţionat două metode: utilizarea definiţiei şi utilizarea corolarului teoremei lui Lagrange. Să observăm că în exemplul de mai sus nu putem utiliza corolarul teoremei lui Lagrange deoarece nu există $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} F'(x)$.

Tabloul de la pagina 193 ne permite să formulăm metode pentru a arăta că o funcţie are primitive şi metode pentru a arăta că o funcţie nu are primitive.

Vom enunţa aceste metode şi le vom exemplifica,în primul rând cu exerciţii din manualul de analiză matematică cls. XII,pentru a sublinia astfel necesitatea familiarizării cu diversele noţiuni întâlnite în manualele de liceu.

(A) Metoda pentru a arăta că o funcţie are primitive

Primele trei metode se deduc din tablou utilizînd implicaţii de forma $a \longrightarrow b$:

(EP_1) Arătăm că funcţia este derivabilă.

(EP_2) Arătăm că funcţia este continuă.

(EP_3) Construim primitiva.

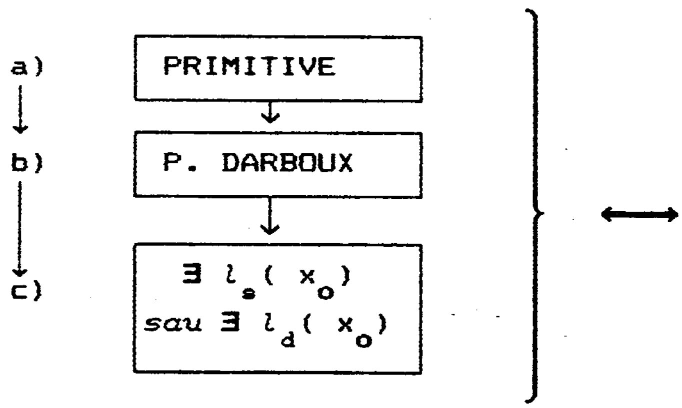
(EP_4) Arătăm că funcţia este o sumă de funcţii care admit primitive.

De reţinut că metoda EP_2 este preferată metodei EP_1 deoarece este mai uşor de demonstrat continuitatea decât derivabilitatea, iar metoda EP_3 se foloseşte doar dacă într-un punct de discontinuitate funcţia nu are limită (este singura situaţie în care mai poate avea primitive).

(B) <u>Metode pentru a arăta că o funcţie nu are primitive</u>

Primele trei metode se deduc din acelaşi tablou utilizând echivalenţa: $a \longrightarrow b \iff \text{non } b \longrightarrow \text{non } a$.

Avem deci:



$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{non c)} \\ \downarrow \\ \text{non b)} \\ \downarrow \\ \text{non a)} \end{array} \right.$$

$\boxed{\begin{array}{c} \exists\ l_s(x_o) < \infty \text{ și} \\ \exists\ l_d(x_o) < \infty \end{array}}$ $\searrow$ $\boxed{\text{non DARBOUX}}$ $\swarrow$ $\boxed{\begin{array}{c} \exists\ l_s(x_o) = \infty \text{ sau} \\ \exists\ l_d(x_o) = \infty \end{array}}$

$\downarrow$

$\boxed{\text{non PRIMITIVE}}$

Deducem astfel următoarele metode pentru a arăta că o funcție nu are primitive:

(NP_1) Arătăm că <u>intr-un punct de discontinuitate</u> ambele limite laterale există și sunt finite sau cel puțin o limită laterală este infinită.

(NP_2) Arătăm că funcția nu are proprietatea lui Darboux.

(NP_3) Presupunem prin absurd că f are primitive și obținem o contradicție.

(NP_4) Dacă f este suma a două funcții, una admițind primitive, cealaltă nu, rezultă că f nu are primitive.

Exemple:

(EP_2) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^5} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

are primitive deoarece f este continuă.

$$(EP_3) \quad f(x) = \begin{cases} 2x \cdot \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Rezolvare: Observăm că $2x \cdot \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ provine din derivarea funcției $x^2 \sin \frac{1}{x}$, deci o primitivă a lui f trebuie să fie de forma:

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} + C & x \neq 0 \\ \alpha & x = 0 \end{cases}$$

Punem condiția ca F să fie continuă în zero:

$$l_s(0) = l_d(0) = \lim_{x \to 0} \left(x^2 \sin \frac{1}{x} + C \right) = C \, , \quad F(0) = \alpha$$

deci $\alpha = C$ și avem:

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} + C & x \neq 0 \\ C & x = 0 \end{cases}$$

Punem condiția ca F să fie derivabilă în zero:

$$F'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} + C - C}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$$ (ceva mărginit înmulțit cu ceva care tinde la zero, tinde la zero), deci F este derivabilă în zero. Dar trobuie să avem și $F'(0) = f(0)$, egalitate care este de asemenea îndeplinită, deci f are primitive.

$$(EP_4) \quad f(x) = \begin{cases} \cos^2 \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$$

Avem: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos\dfrac{2}{x}}{2} & x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & x = 0 \end{cases} = g(x) + h(x)$,

unde $g(x) = \dfrac{1}{2}$, iar $h(x) = \begin{cases} (\cos\dfrac{2}{x})/2 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$,

iar funcţiile g şi h admit primitive.

(NP_1) a) $f(x) = [x] - x$ nu are primitive pe $\mathbb{R}$ deoarece în puncte $x_0 = n$ este discontinuă şi ambele limite laterale sunt finite.

b) $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \sin\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x}\cos x & x > 0 \end{cases}$ nu are primitive deoarece $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$.

(NP_2) Funcţiile pentru care se utilizează această metodă în manual sunt de forma:

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & x \in \mathbb{Q} \\ h(x) & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

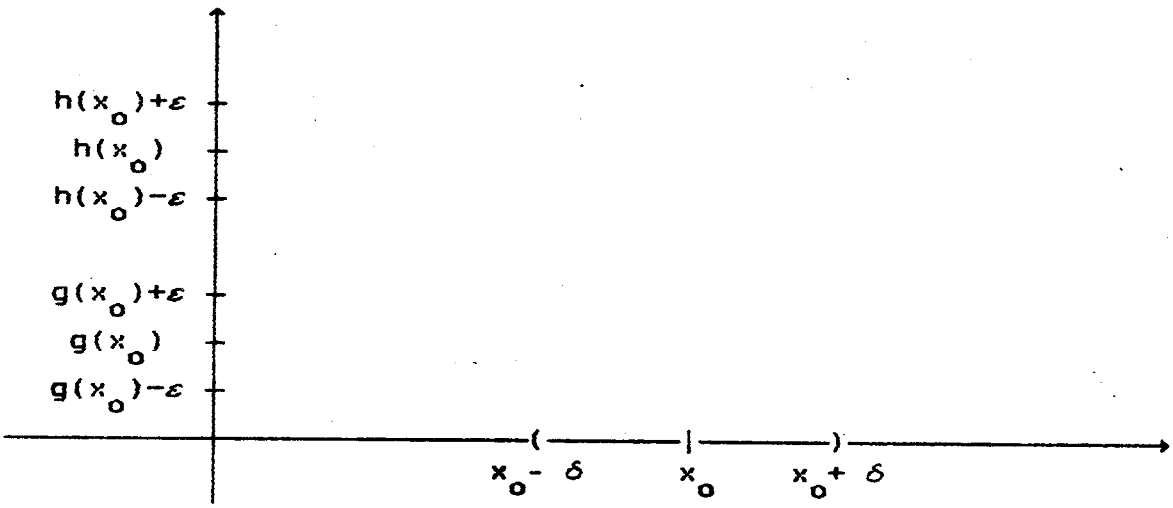
cu g şi h funcţii continue, $g \neq h$. Vom demonstra pe acest caz general că f nu are proprietea lui Darboux. Demonstraţia poate fi adaptată la orice caz particular.

Trebuie să demonstrăm că există un interval a cărui imagine prin f nu este un interval. Utilizăm cele două condiţii din ipoteză.

Rezolvarea exercitiului: Trebuie să demonstrăm că există un in-

terval a cărui imagine prin funcţia f nu este un interval,utilizînd cele două condiţii din ipiteză.

Din condiţia $g \neq h$ deducem că există cel puţin un punct x_o în în care $g(x_o) \neq h(x_o)$.Atunci pentru ε suficient de mic intervalele $(g(x_o) - \varepsilon, g(x_o)+\varepsilon)$ şi $(h(x_o)-\varepsilon, h(x_o)+\varepsilon)$ sunt disjuncte (vezi figura de mai jos).



Din condiţia g şi h continue în x_o deducem:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |x - x_o| < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - g(x_o)| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |x - x_o| < \delta_2 \Rightarrow |h(x) - h(x_o)| < \varepsilon$$

Considerând,după cum am mai spu pe ε suficient de mic pentru ca intervalele $(g(x_o) - \varepsilon , g(x_o) + \varepsilon)$ şi $(h(x_o) - \varepsilon , h(x_o) + \varepsilon)$ să fie disjuncte,iar $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$,rezultă că imaginea prin funcţia f a intervalului$(x_o- \delta , x_o+ \delta)$ nu este un interval, deoarece:

$x \in (x_o- \delta,x_o+ \delta) \cap \mathbb{Q} \Rightarrow f(x) = g(x) \in (g(x_o)-\varepsilon,g(x_o)+\varepsilon)$

$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \Rightarrow f(x) = h(x) \in (h(x_0)-\varepsilon, h(x_0)+\varepsilon)$.

(NP_3) Această metodă presupune aceleaşi etape ca şi metoda EP_3.

(a) căutăm primitive pentru ramurile lui f şi obţinem o primă expresie a lui F;

(b) punem condiţia ca F să fie continuă în punctul (punctele) de legătură între ramuri;

(c) punem condiţia ca F să fie derivabilă în aceste puncte:

- dacă F este derivabilă şi $F'(x_0) = f(x_0)$, am parcurs metoda (EP_3).
- dacă F nu este derivabilă în x_0 sau $F'(x_0) \neq f(x_0)$, am parcurs metoda (NP_3).

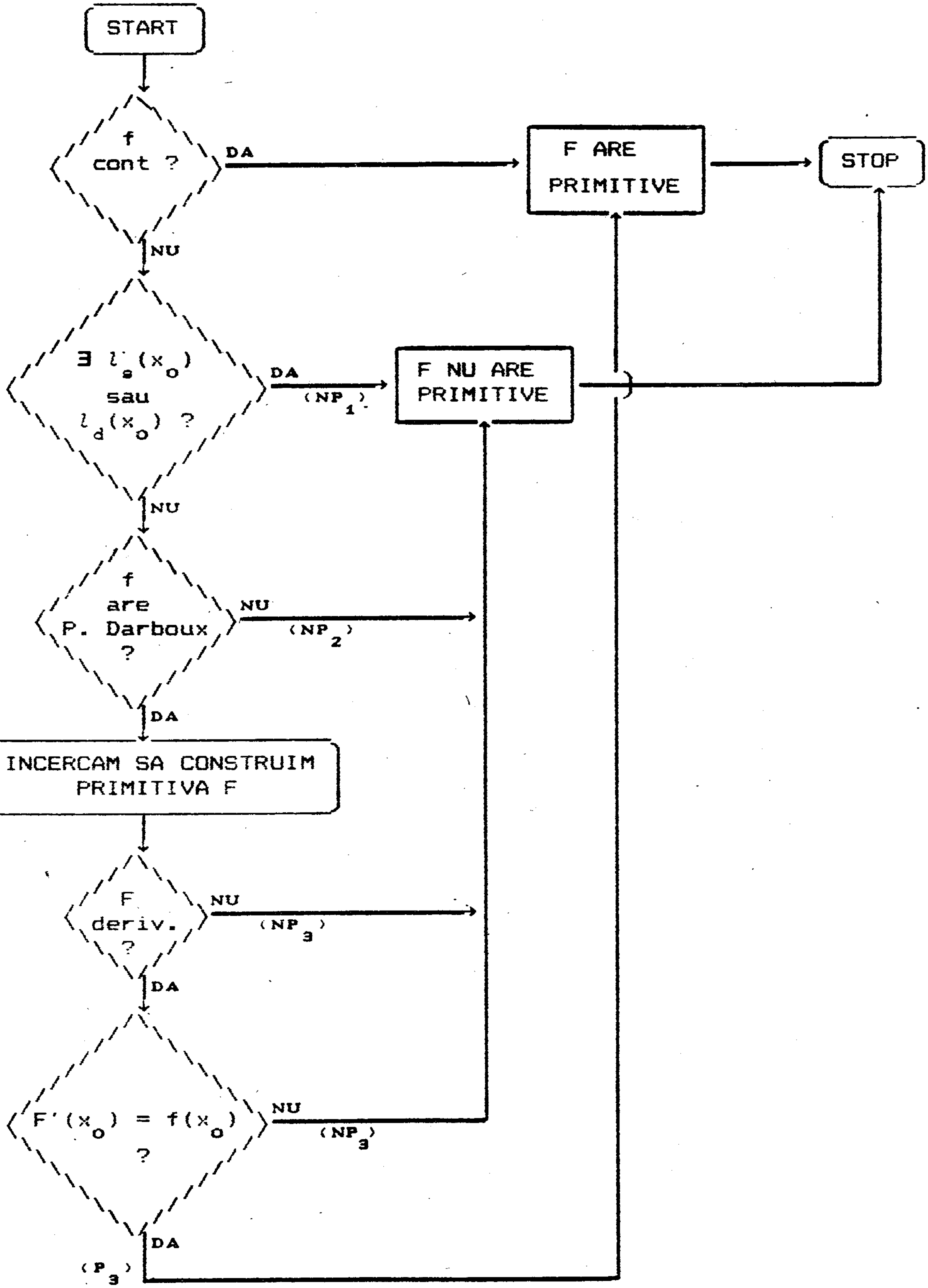
(NP_4) $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ nu are primitive pe $\mathbb{R}$.

Într-adevăr, avem $f(x) = g(x) + h(x)$ cu

$$g(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad \text{şi} \quad h(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

iar g este continuă deci are primitive şi h are limite laterale finite în zero, deci nu are primitive. Dacă prin absurd f ar avea primitive, ar rezulta că $h(x) = f(x) - g(x)$ are primitive.

Rezolvarea problemelor în care se cere să se studieze dacă o funcţie are primitive se poate face conform schemei logice următoare:


START
f cont ?
DA
F ARE PRIMITIVE
STOP
NU
∃ $l_s(x_o)$ sau $l_d(x_o)$?
DA
(NP_1)
F NU ARE PRIMITIVE
NU
f are P. Darboux ?
NU
(NP_2)
DA
INCERCAM SA CONSTRUIM PRIMITIVA F
F deriv. ?
NU
(NP_3)
DA
$F'(x_o) = f(x_o)$?
NU
(NP_3)
DA
(P_3)

EXERCITII:

I. Utilizând metoda (EP_2), să se arate că următoarele funcții au primitive pe $\mathbb{R}$:

1. $f(x) = \max(x, x^2)$

2. $$f(x) = \begin{cases} a \cdot \ln(3 - x) & x < 1 \\ \dfrac{2^x - 2}{x - 1} & x > 1 \end{cases}$$

3. $$f(x) = \left| \left[x - \frac{1}{2} \right] - x \right|$$

4. $$f(x) = \min_{x \in \mathbb{Z}} | x - k |$$

5. $$f(x) = \begin{cases} \ln(1 - x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

6. $$f(x) = \begin{cases} |x|^x & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

7. $$f(x) = \begin{cases} x \cdot \left| \ln|x| + x \right| & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

8. $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(n \cdot \arccos x)}{\sqrt{1 - x^2}} & x \in (-1, 1) \\ n & x = 1 \text{ sau } x = -1 \end{cases}$$

II. Utilizând metodele (EP_3) − (NP_3) , să se studieze dacă următoarele funcții au primitive:

1. $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & x \leqslant 2 \\ 2x + 1 & x > 2 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2 \dfrac{1}{x}} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$

3. $f(x) = \max(1 - x, \ln x)$

4. $f(x) = \begin{cases} \cos \dfrac{1}{x} & x < 0 \\ \operatorname{arctg}(a + x) & x \geqslant 0 \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} & x < 0 \\ \operatorname{arctg} x & x \geqslant 0 \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x} \cos x & x > 0 \end{cases}$

7. $f(x) = \begin{cases} g'(x) \cdot \sin \dfrac{1}{g(x)} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ dacă $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

şi satisface: $g(x) = 0 \iff x = 0$.

8. $f(x) = \begin{cases} |x - a| \cdot \sin \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} \sin(\sin \dfrac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

10. Produsul dintre o funcţie h care admite primitive şi o funcţie g derivabilă cu derivata continuă este o funcţie care admite primitive.

Ind.: Dacă H este primitiva lui h, atunci H.g′ este continuă, deci

admite primitive. Fie G o primitivă a sa. Avem $(H.g - G)' = h.g$.

11. $f(x) = \begin{cases} g(x)\cdot\sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ g fiind o funcție derivabilă cu derivata continuă pe $\mathbb{R}$.

III. Utilizând metoda (NP_1), să se arate că următoarele funcții nu au primitive:

1. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} & x < 0 \\ \operatorname{arctg} x & x \geqslant 0 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0 \\ \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos x & x > 0 \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} \inf\limits_{t\leq x}(t^2 - t + 1) & x \leqslant \frac{1}{2} \\ \sup\limits_{t\geq x}(-t^2 + t - 3) & x > \frac{1}{2} \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{x}\sin x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

IV. Utilizând metoda (NP_2), să se arate că următoarele funcții nu au primitive:

1. $f(x) = \begin{cases} 3x & x \in \mathbb{Q} \\ 2x^2 + 1 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} \sin x & x \in \mathbb{Q} \\ \cos x & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} \ln x & x \in \mathbb{Q} \\ e^x & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \in \mathbb{Q} \\ \sqrt[3]{x} & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} x\cdot[x] & x \in \mathbb{Q} \\ -x^2 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Raspuns:

1. Funcţiile $g(x) = 3x$ şi $h(x) = 2x^2 + 1$ sunt continue pe $\mathbb{R}$ şi $g \neq h$. Vom arăta că f nu are proprietatea lui Darboux. Fie x_0 un punct în care avem $g(x_0) = h(x_0)$, de exemplu $x_0 = 2$. Avem $g(2) = 6$, $h(2) = 9$.

h - continuă în $x_0 = 2$ <=>

<=> $\left[\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta_1 > 0 \;\; \forall\, x \in \mathbb{R},\; |x - 2| < \delta_1 \Rightarrow |3x - 6| < \varepsilon\right]$

g - continuă în $x_0 = 2$ <=>

<=> $\left[\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta_2 > 0 \;\; \forall\, x \in \mathbb{R},\; |x - 2| < \delta_2 \Rightarrow |2x^2 + 1 - 9| < \varepsilon\right]$

Fie ε astfel încât intervalele $(6 - \varepsilon, 6 + \varepsilon)$ şi $(9 - \varepsilon, 9 + \varepsilon)$ să fie disjuncte. De exemplu $\varepsilon = 1$ şi fie $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Atunci imaginea intervalului $(2 - \delta, 2 + \delta)$ prin f nu este un interval deoarece pentru $x \in \mathbb{Q} \cap (2 - \delta, 2 + \delta)$ avem $f(x) = 3x \in (5,7)$ iar pentru $x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (2 - \delta, 2 + \delta)$ avem $f(x) = 2x^2 + 1 \in (8,10)$.

V. Utilizând metodele (EP_4) - (NP_4) să se studieze dacă următoarele funcţii admit primitive:

$$1.\quad f(x) = \begin{cases} \cos^3 \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Indicatie: $\cos \frac{3}{x} = 4\cdot\cos^3 \frac{1}{x} - 3 \cos \frac{1}{x}$, deci $f(x) = g(x) + h(x)$,

cu:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} \cos \frac{3}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad \text{şi} \quad h(x) = \begin{cases} 3\cdot\cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$2.\quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + \sin x} \sin \frac{1}{x} & x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \setminus \{ 0 \} \\ a & x = 0 \end{cases}$$

Indicatie: $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \setminus \{ 0 \} \\ 0 \end{cases} +$

$+ \begin{cases} \frac{1}{1 + \sin x} \sin \frac{1}{x} \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ Se obţine $a = 0$.

$$3.\quad f(x) = \begin{cases} \sin^n \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N} .$$

8. INTEGRABILITATE

Integrala se definește cu ajutorul unei limite. Mult mai ușor înțelege aspectele teoretice referitoare la integrală acela care a înțeles de ce este nevoie să se renunțe acum la cele două mari categorii de limite avute în vedere până la acest nivel:

1. limita când x tinde la x_0
2. limita când n tinde la infinit

și se introduce o altă categorie de limite:

3. limita când norma diviziunii tinde la zero.

Precizările care urmează sunt tocmai pentru lămurirea acestui aspect.

Teoria integralei a apărut dintr-o necesitate practică, aceea de a calcula aria cuprinsă între graficul unei funcții și axa Ox.

Fiind dată o funcție mărginită și (deocamdată) nenegativă $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ putem aproxima aria dorită cu ajutorul unor dreptunghiuri având baza pe Ox.

Pentru aceasta se consideră punctele:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \quad .$$

Mulţimea acestor puncte formează o diviziune a intervalului $[a,b]$ şi se notează cu Δ :

$$\Delta = \{ x_0 , x_1 , x_2 , \ldots , x_n \}$$

Fâşiile verticale realizate cu ajutorul punctelor x_i au aria la fel de greu de calculat ca şi aria iniţială, datorită conturului superior. Obţinem dreptunghiuri dacă înlocuim contururile superioare cu segmente orizontale.

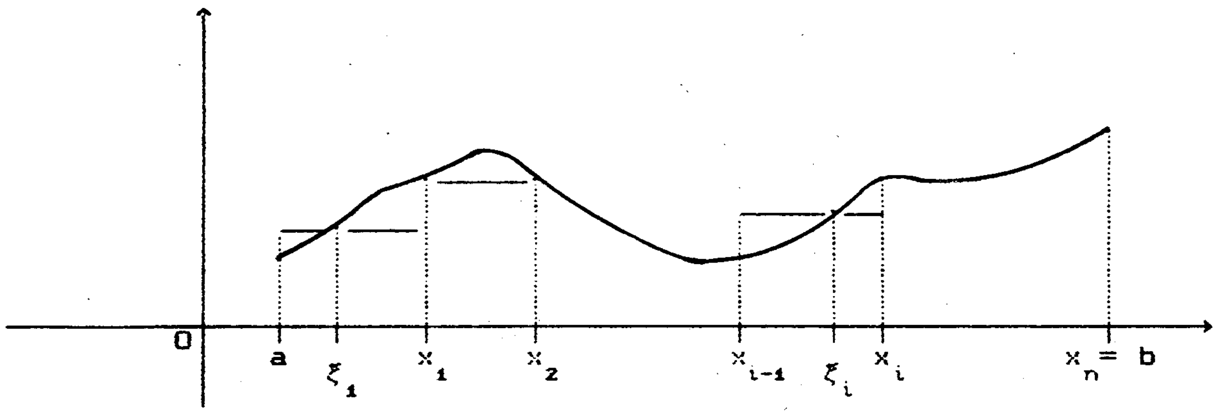


Fig. 8.1

Pentru ca aproximaţia astfel obţinută pentru arie să fie rezonabilă este firesc ca aceste segmente orizontale să întâlnească graficul funcţiei. Observăm că o astfel de orizontală este unic determinată de un punct ξ_i aflat între x_{i-1} şi x_i. Am obţinut astfel dreptunghiurile cu care urmăream să aproximăm aria căutată.

Ariile dreptunghiurilor sunt:

$$(x_1 - x_0) \cdot f(\xi_1) \ , \ (x_2 - x_1) \cdot f(\xi_2) \ , \ \ldots \ , \ (x_n - x_{n-1}) \cdot f(\xi_n)$$

Suma acestor arii se numeşte sumă Riemann ataşată funcţiei f, diviziunii Δ şi punctelor intermediare ξ_i. Această sumă:

$$\sigma_\Delta(f,\xi) = (x_1 - x_0)f(\xi_1) + (x_2 - x_1)f(\xi_2) + \ldots$$

$$\ldots + (x_n - x_{n-1})f(\xi_n) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(\xi_i)$$

aproximează aria căutată.

Necesitatea introducerii celei de-a treia categorii de limite se datorește necesității ca aproximația să fie cât mai bună.

Și acum o întrebare: aproximația este mai bună atunci când:

(a) dreptunghiurile sunt din ce în ce mai multe

sau când

(b) dreptungiurile sunt din ce în ce mai înguste ?

Observăm că "dreptungiurile sunt din ce în ce mai multe" dacă și numai dacă n tinde la infinit, dar făcând pe n să tindă la infinit nu obținem o aproximație "din ce în ce mai bună". Într-adevăr, lăsând primul dreptunghi neschimbat, de exemplu, și mărind numărul de puncte de la el spre dreapta oricât de mult (făcând pe n să tindă la infinit)aproximația rămâne grosieră.Aproximația devine însă din ce în ce mai bună dacă "dreptungiurile sunt din ce în ce mai subțiri".

Pentru a trece de la această observație intuitivă la concretul matematic, observăm că dreptunghiurile sunt din ce în ce mai subțiri dacă "cel mai gros dintre ele" devine din ce în ce mai subțire.

Cea mai mare grosime a dreptunghiurilor determinate de o diviziune Δ se numește norma diviziunii Δ.

$$\| \Delta \| = \max\{ x_1 - x_0 , x_2 - x_1 , \ldots , x_n - x_{n-1} \} = \max_{i=1,n}(x_i - x_{i-1})$$

Așadar,

"aproximații cât mai bune" <=> "dreptunghiuri din ce în ce mai

subţiri" <=> "cea mai mare grosime tinde la zero" <=> "norma lui Δ tinde la zero" <=> $\|\Delta\| \longrightarrow 0$.

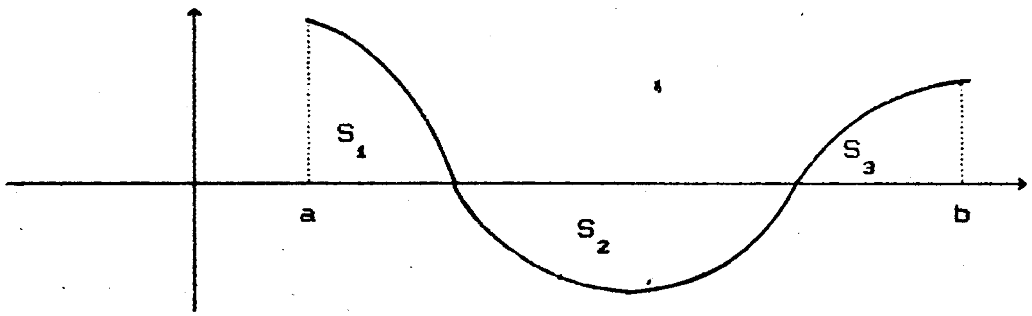
Aria porţiunii aflate între graficul funcţiei f şi axa Ox este deci:

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sigma_\Delta(f,\xi)$$

Această limită se notează cu $\int_a^b f(x)\,dx$ şi se numeşte integrala funcţiei f pe intervalul [a,b].

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sigma_\Delta(f,\xi)$$

Pentru funcţii care nu sunt neapărat nenegative pe [a,b] integrala reprezintă diferenţa dintre aria aflată deasupra axei ox şi aria aflată sub axa Ox:



$$\int_a^b f(x)\,dx = S_1 - S_2 + S_3$$

Prin urmare, pentru a obţine aria porţiunii aflată între grafic şi axa Ox, într-un astfel de caz trebuie considerat modulul lui f:

$$A = \int_a^b |f(x)|\, dx$$

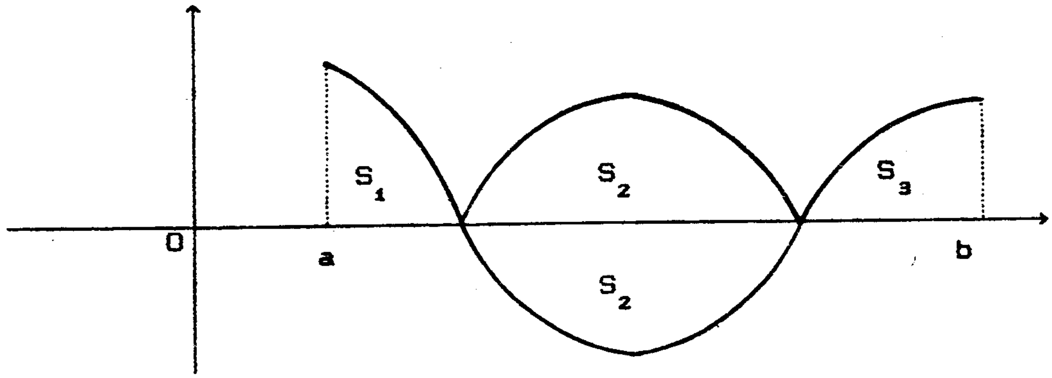


Fig. 8.3

Revenind la afirmațiile (a) și (b) de mai sus, să observăm că: "dreptunghiurile sunt din ce în ce mai subțiri" => "dreptunghiurile sunt din ce în ce mai multe", adică (b) => (a).

Altfel spus, $\| \Delta \| \longrightarrow 0 \Rightarrow n \longrightarrow \infty$.

Reciproc însă nu este adevărat întotdeauna. De aceea <u>nu putem renunța la $\| \Delta \| \longrightarrow 0$ în favoarea lui $n \longrightarrow \infty$</u>. Totuși există un caz în care este valabilă și implicația reciprocă: atunci când punctele diviziunii sunt echidistante:

$n \longrightarrow \infty \Rightarrow \| \Delta \| \longrightarrow 0$ pentru puncte echidistante

În aceste caz dreptunghiurile au aceeași dimensiune a bazei și anume $x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}$ pentru orice $i = 1,2,\dots,n$, iar suma Riemann devine:

$$\sigma_\Delta(f,\xi) = \frac{b-a}{n}\Big(f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_n) \Big) =$$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)$$

Pentru astfel de diviziuni are deci loc echivalența:

$$\|\Delta\| \longrightarrow 0 \iff n \longrightarrow \infty$$

care permite, după cum s-a văzut la metoda 16 de calcul a limitelor, utilizarea definiției integralei la calculul limitelor de şiruri.

Înainte de a enumera şi exemplifica metodele pentru studiul integrabilității, să observăm că <u>dacă funcția este continuă,</u> printre sumele Riemann $\sigma_\Delta(f,\xi)$ ce se pot obține modificând doar înălțimile dreptungiurilor (modificînd doar punctele intermediare ξ_i) există o cea mai mare şi o cea mai mică sumă Riemann şi anume suma Riemann având valoarea cea mai mare se obține alegând punctele $\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$ pentru care:

$f(\xi_i) = \sup \{ f(x) \mid x \in [x_{i-1},x_i] \} = M_i$, iar suma Riemann cu valoarea cea mai mică se obține alegând punctele ξ_i pentru care:

$f(\xi_i) = \inf \{ f(x) \mid x \in [x_{i-1},x_i] \} = m_i$. Notând cu $S_\Delta(f)$ şi respectiv $s_\Delta(f)$ aceste sume (numite suma Darboux superioară, respectiv inferioară) avem:

$$S_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \quad \text{şi} \quad s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

şi $s_\Delta(f) \leq \sigma_\Delta(f,\xi) \leq S_\Delta(f)$ oricare ar fi diviziunea Δ (8.1)

Punctele ξ_i care realizează supremul, respectiv infimul lui f pe intervalele $[x_{i-1},x_i]$ există deoarece se ştie că o funcție continuă pe un interval închis şi mărginit este mărginită şi îşi atinge marginile. Se ştie (vezi teorema 37 din manualul de analiză matematică cls. XI) că o funcție este integrabilă dacă şi numai dacă:

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \left(S_\Delta(f) - s_\Delta(f) \right) = 0 \qquad (8.2)$$

CONEXIUNI INTRE INTEGRABILITATE SI ALTE NOTIUNI SPECIFICE FUNCTIILOR

Pentru a formula astfel de conexiuni, completăm lista propozițiilor $P_1 - P_7$ enunțate în capitolul precedent, cu următoarele:

P_8) orice funcție integrabilă pe [a,b] este mărginită

P_9) orice funcție monotonă pe [a,b] este integrabilă

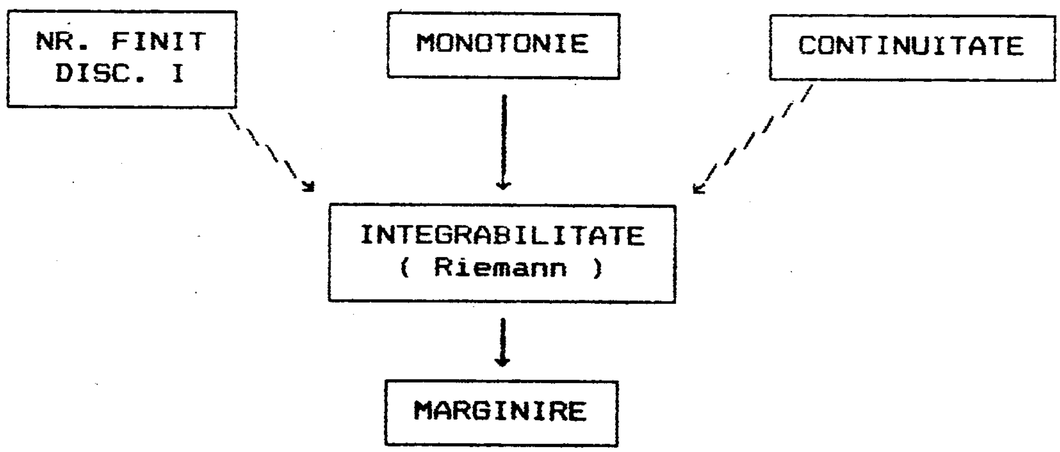
P_{10}) orice funcție continuă pe [a,b] este integrabilă

P_{11}) orice funcție care are pe [a,b] un număr finit de puncte de discontinuitate de speța întâi este integrabilă.

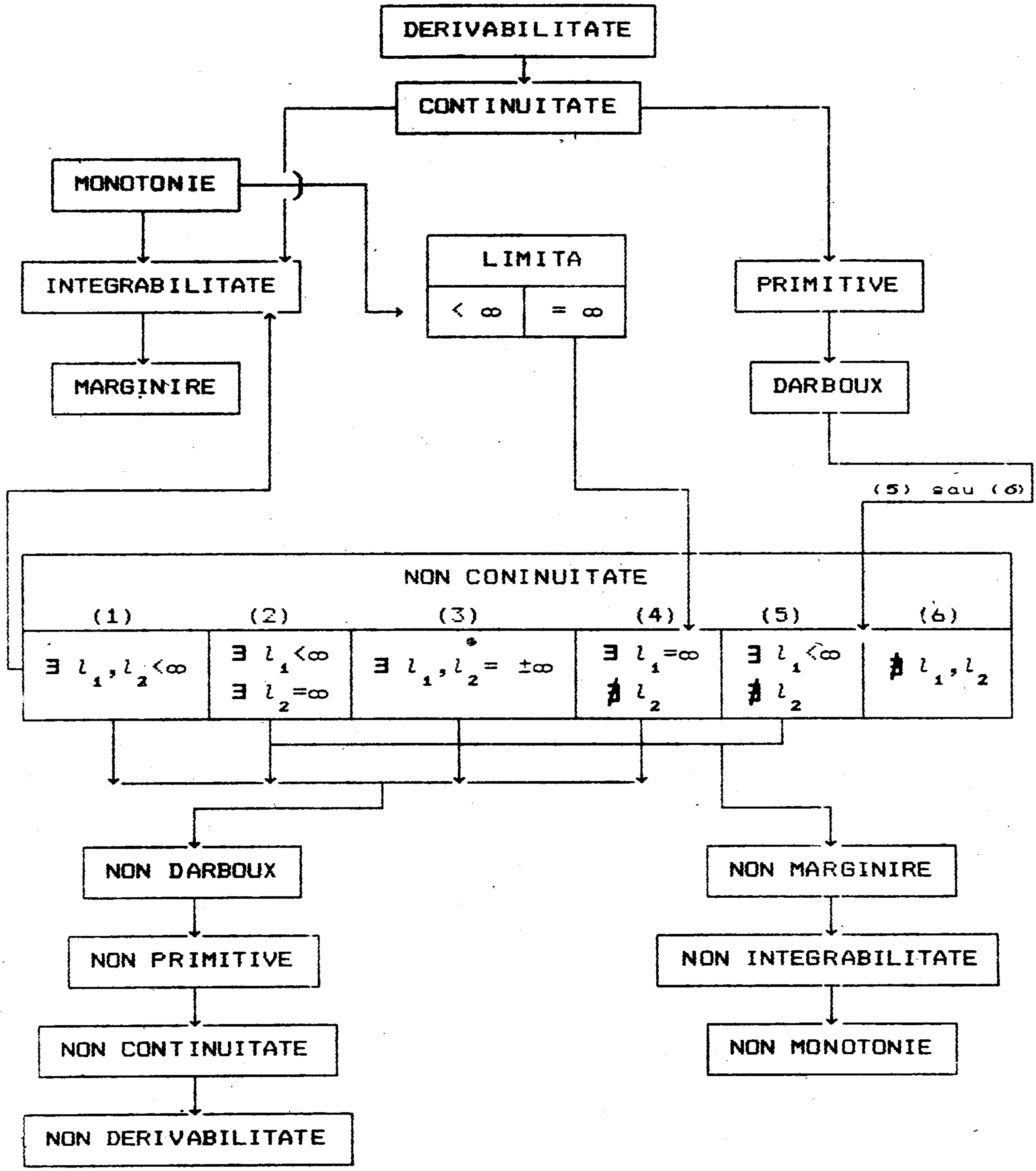
Demonstrația lui P_{10} rezultă din faptul că dacă unei funcții integrabile pe [a,b] îi modificăm valorile într-un număr finit de puncte se obține tot o funcție integrabilă și din proprietatea de aditivitate față de interval a integralei:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Utilizând propozițiile de mai sus putem realiza următorul tablou



iar tabolul cuprinzând implicații între toate noțiunile de care ne-am ocupat este următorul (l_1 și l_2 fiind una din limitele laterale):



METODE PENTRU A ARATA CA O FUNCTIE ESTE INTEGRABILA (RIEMANN) PE [a,b]

(I_1) utilizarea definiţiei

(I_2) arătăm că este continuă

(I_3) arătăm că are un număr finit de puncte de discontinuitate de speţa întâi

(I_4) arătăm că este monotonă

(I_5) arătăm că funcţia este sumă de funcţii integrabile

METODE PENTRU A ARATA CA O FUNCTIE NU ESTE INTEGRABILA (RIEMANN) PE [a,b]

(NI_1) utilizarea definiţiei (arătăm că $\sigma_\Delta(f,\xi)$ nu are limită finită pentru $\|\Delta\| \longrightarrow 0$)

(NI_2) arătăm că funcţia nu este mărginită

(NI_3) arătăm că funcţia este suma dintre o funcţie integrabilă şi una neintegrabilă .

Exemple:

(I_1) (a) Utilizînd definiţia integralei, să se arate că orice funcţie derivabilă cu derivata mărginită pe [a,b] este integrabilă pe [a,b].

Rezolvare: Fie $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabilă. Trebuie arătat că $\sigma_\Delta(f,\xi)$ are limită finită când $\|\Delta\| \longrightarrow 0$. Funcţia dată fiind derivabilă, este continuă, deci are primitive. Fie F o

primitivă a sa. Funcţiei F îi putem aplica teorema lui Lagrange pe orice interval $[x_{i-1}, x_i]$. Există deci $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ astfel încât:

$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(c_i)(x_i - x_{i-1})$. Rezultă:

$$\sigma_\Delta(f,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Big(f(c_i) - f(c_i) + f(\xi_i) \Big)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} \Big(f(\xi_i) - f(c_i) \Big)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Big(F(x_i) - F(x_{i-1}) \Big) + \sum_{i=1}^{n} \Big(f(\xi_i) - f(c_i) \Big)(x_i - x_{i-1}) .$$

Calculăm separat cele două sume:

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(F(x_i) - F(x_{i-1}) \Big) = \Big(F(x_1) - F(x_0) \Big) +$$

$$+ \Big(F(x_2) - F(x_1) \Big) + \ldots + \Big(F(x_n) - F(x_{n-1}) \Big) =$$

$$= F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a).$$

Arătăm că a doua sumă tinde la zero cînd $\|\Delta\| \longrightarrow 0$.
Pentru aceasta ţinem cont că f' este mărginită, adică există $M > 0$ astfel încât $|f'(x)| < M$ pentru orice x din $[a,b]$ şi aplicăm funcţiei f teoreme lui Lagranĝe, dar pe intervalele de extremităţi ξ_i şi c_i. Există θ_i între ξ_i şi c_i astfel încât:

$$f(\xi_i) - f(c_i) = (\xi_i - c_i) f'(\theta_i)$$

Rezultă deci:

$$|f(\xi_i) - f(c_i)| = |\xi_i - c_i| \cdot |f'(\theta_i)| \leqslant |\xi_i - c_i| \cdot M \leqslant$$
$$\leqslant \|\Delta\| \cdot M$$

Pentru a doua sumă avem deci:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} (f(\xi_i) - f(c_i))(x_i - x_{i-1}) \right| \leq$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left| f(\xi_i) - f(c_i) \right| \cdot | x_i - x_{i-1} | \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} | \xi_i - c_i | \cdot M \cdot | x_i - x_{i-1} | \leq \sum_{i=1}^{n} \| \Delta \| \cdot M \cdot | x_i - x_{i-1} | =$$

$$= \| \Delta \| \cdot M \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \| \Delta \| \cdot M \cdot (b - a) \xrightarrow{\|\Delta\| \longrightarrow 0} 0 .$$

Condiţia din ipoteza acestui exerciţiu este foarte puternică. După cum se ştie, se poate arăta că o funcţie care îndeplineşte doar condiţia de continuitate este de asemenea integrabilă. Totuşi procedeul aplicat în acest exerciţiu poate fi adaptat uşor la majoritatea exerciţiilor în care se cere să se arate că o funcţie este integrabilă.

(b) Să se arate că $f(x) = \sin x$ este integrabilă pe orice interval $[a,b]$. (Manual)

Rezolvare: Vom adapta demonstraţia precedentă. Funcţia dată este derivabilă şi cu derivata $f'(x) = \cos x$ mărginită. Fiind derivabilă este şi continuă şi are primitive.

Fie F o primitivă a sa, $F(x) = - \cos x$, şi fie $\Delta = (a = x_0 , x_1 , \ldots , x_n = b)$ o diviziune a lui $[a,b]$. Aplicăm teorema lui Lagrange funcţiei F pe fiecare interval $[x_{i-1}, x_i]$. Există $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ astfel încât:

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f'(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) .$$

Funcţia f are derivata mărginită: $|\cos x| \leq 1$ pentru orice x din $\mathbb{R}$, deci şi pentru orice x din $[a,b]$. Trebuie arătat că $\sigma_\Delta(f,\xi)$

are o limită finită cind $\| \Delta \| \longrightarrow 0$. Vom arăta că această limită este (după cum se ştie) $F(b) - F(a) = -\cos b + \cos a$.

Avem:

$$\sigma_\Delta(f,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(f(c_i) - f(c_i) + f(\xi_i) \right)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} \left(f(\xi_i) - f(c_i) \right)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(F(x_i) - F(x_{i-1}) \right) + \sum_{i=1}^{n} \left(f(\xi_i) - f(c_i) \right)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= F(b) - F(a) + \sum_{i=1}^{n} \left(f(\xi_i) - f(c_i) \right)(x_i - x_{i-1}) .$$

Aplicând teorema lui Lagrange şi funcţiei $f(x) = \sin x$, pe intervalul determinat de punctele ξ_i şi c_i , deducem că există θ_i intre ξ_i şi c_i astfel incât:

$$\sin \xi_i - \sin c_i = (\xi_i - c_i)\cdot\cos\theta_i \text{ , deci}$$

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \left(f(\xi_i) - f(c_i) \right)(x_i - x_{i-1}) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} | f(\xi_i) - f(c_i) | \cdot | x_i - x_{i-1} | =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} | \sin \xi_i - \sin c_i | \cdot | x_i - x_{i-1} | =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} | \cos \theta_i | \cdot | \xi_i - c_i | \cdot | x_i - x_{i-1} | \leq \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \| \Delta \| \cdot | x_i - x_{i-1} | =$$

$$= \| \Delta \| \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \| \Delta \| \cdot (b - a) \xrightarrow[\|\Delta\| \to 0]{} 0 .$$

Deci: $\lim\limits_{\|\Delta\| \to 0} \sigma_\Delta(f,\xi) = F(b) - F(a) = -\cos b + \cos a$.

(I_2) Funcţia: $f : [0 , 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{\pi}{2 - x} & \text{dacă } x \in [0,2) \\ \pi/2 & \text{dacă } x = 2 \\ (e^{x-2} + x - 2)^{\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2(x-2)}}} & \text{dacă } x \in (2,3] \end{cases}$$

este integrabilă. Într-adevăr, ea este continuă în orice punct $x \neq 2$ din domeniul de definiţie, fiind exprimată prin funcţii continue. Studiem continuitatea în $x = 2$:

$$l_s(2) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = \operatorname{arctg} \frac{\pi}{0+} = \operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$$

$$l_d(2) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = \frac{\pi}{2} = f(2)$$. Funcţia este continuă pe intervalul $[0,3]$, deci este integrabilă.

(I_3) $f(x) = x - [x]$, $f : [0 , 2\sqrt{3}\,] \longrightarrow \mathbb{R}$

poate fi discontinuă doar în punctele în care $[x]$ este discontinuă. Acestea sunt de forma $x = n$, $n \in \mathbb{Z}$. Dintre acestea doar punctele 0 , 1 , 2 , 3 , sunt în domeniul funcţiei. Studiem limita în aceste puncte. Avem:

$l_s(1) = l_s(2) = l_s(3) = l_s(3) = 1$ şi

$l_d(0) = l_d(1) = l_d(2) = l_d(3) = 0$, deci funcţia are un număr finit de puncte de discontinuitate de speţa întâi, aşadar este integrabilă.

(I_4) Despre funcţia $f(x) = [x]$ putem spune că este integrabilă fie utilizând criteriul precedent, fie utilizând faptul că ea este monotonă pe orice interval $[a,b]$.

(I_3) Funcția $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ prin $f(x) = \operatorname{sgn} x + |x| + [x]$ este integrabilă deoarece este suma a trei funcții integrabile: $f_1(x) = \operatorname{sgn} x$ este integrabilă deoarece are un număr finit de puncte de discontinuitate (un singur punct, $x = 0$) și discontitatea este de speța întâi; funcția $f_2(x) = |x|$ este integrabilă deoarece este continuă, iar funcția $f_3(x) = [x]$ este integrabilă fiind monotonă (sau pentru că are un singur punct de discontinuitate și el este de speța întâi).

(NI_1) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 1 & x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$

nu este integrabilă deoarece alegând în suma Riemann:

$$\sigma_\Delta(f,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

punctele intermediare ξ_i raționale, avem $f(\xi_i) = 0$, deci în acest caz $\sigma_\Delta(f,\xi) = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 0$, iar dacă ξ_i sunt iraționale, avem $\sum_{i=1}^{n} 1 \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = b - a$.

(NI_2) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \in (0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

nu este integrabilă (Riemann) pe $[0,1]$ deoarece nu este mărginită.

(NI_3) $f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{x} & x \in (0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

este suma funcțiilor $f_1(x) = x$ și $f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \in (0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Dacă f ar fi integrabilă, din $f = f_1 + f_2$ ar rezulta $f_2 = f - f_1$ deci f_2 ar fi integrabilă pe $[0,1]$, ca sumă de două funcții integrabile.

EXERCITII:

I. Utilizând definiția, să se arate că următoarele funcții sunt integrabile:

1. $f(x) = e^x$
2. $f(x) = \operatorname{tg} x$
3. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
4. $f(x) = \arcsin \frac{x}{2}$
5. $f(x) = \cos^2 x$
6. $f(x) = \sin 2x$

II. Studiați integrabilitatea funcțiilor:

1. $f(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1] \\ x^2 & x \in (1,2] \end{cases}$

2. $f(x) = \sup\limits_{t \in [0,1]} \left(t^2 - \frac{1}{2} \right)$

3. $f(x) = \max\limits_{t \in [0,\pi]} (\sin t , \cos t)$

4. $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{x^2 + x \cdot e^{nx}}{1 + e^{nx}}$

5. $f(x) = \begin{cases} x \cdot \left[\frac{1}{x} \right] & x \in (0,1] \\ a & x = 0 \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} \left[\ln \frac{1}{x} \right] & x \in [0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

7. $f(x) = \frac{4}{3^n} - x$, $f:[a,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in (0,1)$

8. Funcţia caracteristică a mulţimii $[0,1] \subset \mathbb{R}$.

9. $$f(x) = \begin{cases} ax + b & x \in [-1,0] \\ cx + d & x \in (0,1] \end{cases}$$

III. Pentru ce valori ale parametrilor a şi b funcţiile de mai jos sunt integrabile ? Pentru ce valori ale parametrilor au primitive ?

1. $$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(\ln x) & x \in (0,1] \\ a & x = 0 \end{cases}$$

2. $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \left[\frac{1}{x}\right] = 2n + 1 \\ ax + b & \left[\frac{1}{x}\right] = 2n \end{cases}$$

3. $$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x \in (0,1] \\ a & x = 0 \end{cases}$$

4. $$f(x) = \begin{cases} e^x \cos\frac{1}{x} & x \in (0,1] \\ \alpha & x = 0 \end{cases}$$

5. $$f(x) = \begin{cases} 1 & x = \frac{1}{n} \\ 0 & \text{in rest} \end{cases} \qquad f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}\ , \quad a \in (0,1)$$

INDICATII:

1. $l_d(0) = -\frac{\pi}{2}$, deci pentru orice valoare a parametrului, funcţia are o singură discontinuitate, de speţa întâi pe $[0,1]$.

2. Pentru orice valoare a lui $a \in (0,1)$ funcţia are un număr finit de puncte de discontinuitate de speţa întâi.

4. Funcţia $e^x \cos \frac{1}{x}$ provine din derivarea lui $x^2 e^x \sin \frac{1}{x}$.

IV. **1.** Arătaţi că orice funcţie continuă pe un inter/val $[a,b]$ este integrabilă.

2. Adaptaţi demonstraţia de la punctul precedent pentru a arăta că funcţiile următoare sunt integrabile pe intervalul $[0,1]$:

(a) $f(x) = x^2$ (b) $f(x) = \sin x$ (c) $f(x) = e^x$

RASPUNSURI:

1. Vom arăta că $\lim\limits_{\|\Delta\| \to 0} \left(S_\Delta(f) - s_\Delta(f) \right) = 0$

Avem:

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) .$$

unde $M_i = \sup \{ f(x) \mid x \in [x_i,x_{i-1}] \}$,
$m_i = \inf \{ f(x) \mid x \in [x_i,x_{i-1}] \}$. Folosim acum două proprietăţi ale funcţiilor continue pe un interval închis şi mărginit:

(1) o funcţie continuă pe un inteval închis şi mărginit este mărginită şi işi atinge marginile; deci există $u_i, v_i \in [a,b]$ astfel încât $M_i = f(u_i)$, $m_i = f(v_i)$.

Prin urmare,

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} \left(f(u_i) - f(v_i) \right)(x_i - x_{i-1})$$

Pentru evaluarea diferenţei $f(u_i) - f(v_i)$ utilizăm proprietatea:

(2) o funcţie continuă pe un interval închis şi mărginit este uniform continuă (vezi cap. 4, proprietatea 4.1), adică:

$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta_{\varepsilon} > 0 \;\; \forall\, x_1, x_2 \in [a,b],\; |\, x_1 - x_2 | < \delta_{\varepsilon} \;\; \Longrightarrow$

$|f(\, x_1) - f(\, x_2)| < \varepsilon$.

Pentru a putea lua în locul lui x_1 pe u_i şi în locul lui x_2 pe v_i trebuie să considerăm o diviziune Δ având norma mai mică decât δ_{ε} (lucru posibil deoarece facem limita pentru $\|\Delta\| \longrightarrow 0$). Aşadar, presupunând $\|\Delta\| < \delta_{\varepsilon}$ avem $|\, f(\, u_i) - f(\, v_i)\, | < \varepsilon$, adică $M_i - m_i < \varepsilon$ şi deci:

$$S_{\Delta}(f) - s_{\Delta}(f) = \sum_{i=1}^{n} (\, M_i - m_i)(\, x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n} \varepsilon(\, x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \varepsilon \sum_{i=1}^{n} (\, x_i - x_{i-1}) = \varepsilon(b - a).$$

Deoarece ε este arbitrar (de mic) deducem că:

$$S_{\Delta}(f) - s_{\Delta}(f) \xrightarrow[\|\Delta\| \to 0]{} 0$$

deci funcţia este integrabilă.

2. Arătăm că $S_{\Delta}(f) - s_{\Delta}(f)$ tinde la zero cind $\|\, \Delta\, \|$ tine la zero. Avem:

$$S_{\Delta}(f) - s_{\Delta}(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(\, x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(\, x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\, M_i - m_i)(\, x_i - x_{i-1})$$

unde $M_i = \sup \{\, x^2 \;|\;\; x \in [\, x_{i-1}, x_i] \,\} = x_i^2$

$m_i = \inf \{\, x^2 \;|\;\; x \in [\, x_{i-1}, x_i] \,\} = x_i^2$, deoarece pe intervalul $[0,1]$ funcţia $f(x) = x^2$ este crescătoare. Deci:

$$S_{\Delta}(f) - s_{\Delta}(f) = \sum_{i=1}^{n} (\, x_i^2 - x_{i-1}^2)(\, x_i - x_{i-1})$$

Funcţia $f(x) = x^2$ este continuă pe $[0,1]$, deci este uniform

continuă, adică:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \ \forall x_1, x_2 \in [0,1], \ | x_1 - x_2 | < \delta_\varepsilon \Rightarrow | x_2^2 - x_1^2 | < \varepsilon$$

Considerând diviziunea Δ astfel incât $\| \Delta \| < \delta_\varepsilon$ (posibil deoarece $\|\Delta\| \longrightarrow 0$), avem $x_i^2 - x_{i-1}^2 < \varepsilon$, deci:

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon(b - a).$$

Deoarece ε este arbitrar de mic, deducem că:

$\lim\limits_{\|\Delta\| \to 0} \left(S_\Delta(f) - s_\Delta(f) \right) = 0$, adică $f(x) = x^2$ este integrabilă pe [0,1].

BIBLIOGRAFIE

T. ANDREESCU şi colectiv : *Probleme de matematica date la concursurile si examenele din 1983*,Tiparul executat de Intreprinderea Poligrafică "Banat" ,Timişoara,1984.

L. ARAMA , T. MOROZAN : *Probleme de calcul diferential si integral*,Ed. Tehnică,Bucureşti,1978.

C. AVADANEI, N. AVADANEI, C. BORS, C. CHIREA : *De la matematica elementara spre matematica superioara*,Ed. Acad. R.S.R, Bucureşti,1977.

D. M. BATINETU : *Probleme de matematica pentru treapta a doua de liceu*,Ed. Albatros,Bucureşti,1979.

D. M. BATINETU-GIURGIU,V. GHIORGHITA,I. V. MAFTEI,I. TOMESCU F. VORNICESCU : *Probleme date la olimpiadele de matematica pentru licee*.Ed. Stiinţifică,Bucureşti,1992.

D. BUSNEAG,I. MAFTEI : *Teme pentru cercurile si concursurile de matematica ale elevilor*,Ed. Scrisul Românesc,Craiova,1983.

A. CORDUNEANU,G. RADU,L. POP,V. GRAMADA : *Culegere de probleme de matematica*,Ed. Junimea,Iaşi,1972.

GH. CALUGARITA, V. MANGU : *Probleme de matematica pentru treapta I-a si a II-a de liceu*,Ed. Albatros,Bucureşti,1977.

M. COCUZ : *Culegere de probleme de matematica*,Ed. Acad. R.S.R. Bucureşti,1984.

N. DONCIU , D. FLONDOR : *Algebra si analiza matematica,culegere de probleme*,E.D.P. , Bucureşti, 1978.

M. GANGA : *Teme si probleme de matematica*,Ed. Tehnică, Bucureşti,1991.

B. R. GELBAUM,J. M. H. OLMSTED : *Contraexemple in analiza*, Ed. St. Bucureşti,1973.

I. GIURGIU ,F. TURTOIU : *Culegere de probleme de matematica*, E.D.P. ,Bucureşti,1980.

I. ILIESCU,B. IONESCU,D. RADU : *Probleme de matematica pentru admiterea in invatamantul superior*,E.D.P., Bucureşti,1976.

C. IONESCU-TIU,L. PIRSAN :*Calcul diferential si integral pentru admitere in facultate*,Ed. Albatros,Bucureşti,1975.

AL. LEONTE,C. P, NICULESCU : *Culegere de probleme de algebra si analiza matematica*,Ed. Scrisul Românesc,Craiova,1984.

I. A. MARON : *Problems in Calculus of one variable*,Mir Publishers,Moscow,1973.

A. S. MURESAN,V. MURESAN :*Probleme de algebra si analiza matematica,concursuri de admitere 1981 - 1990*,Ed. Tehnică, Bucureşti,1991.

C. NASTASESCU, C. NITA, M. BRANDIBURU, D. JOITA :*Exercitii si probleme de algebra*,E.D.P. , Bucureşti,1981.

C.P.NICOLESCU : *Analiza matematica*,Ed.Albatros,Bucureşti,1987.

C. P. NICOLESCU : Sinteze de matematică Ed. Albatros, Bucureşti,1990.

G. RIZESCU,E. RIZESCU : *Teme pentru cercurile de matematica din liceu*,Ed. Tehnică,Bucureşti,1977.

V. SCHNEIDER, GH. A. SCHNEIDER : *Culegere de probleme de analiza matematica pentru clasele XI - XII*,Ed. Hyperion-Apollo, Craiova,1993.

GH. SIRETCHI : *Exercitii de analiza matematica*,Tipografia Universităţii din Bucureşti,1975.

N. TEODORESCU, A. CONSTANTINESCU, M. MIHAI, L.PIRSAN, E.PERJERIU, A. POPESCU-ZORICA, P. RADOVICI-MARCULESCU, M.TENA : *Probleme din Gazete Matematica,Editie selectiva si metodologica*, Ed. Tehnică,Bucureşti,1984.

R. TRANDAFIR, AL. LEONTE : *Culegere de probleme si exercitii de matematica*,Ed. Junimea,Iaşi,1975.

* * * *Culegere de probleme pentru admiterea in invatamantul superior,Matematica,Fizica si Chimie*,Ed. St. Encicl. Bucureşti, ediţiile 1984 şi 1989.

* * * *Manualele de matematica de liceu,diverse editii.*

* * * *Colectia revistei Gazete Matematica.*

Tipărit la S.C. FEVRODEST-TIPO S.R.L.
Tel: 051 / 134662 , 134809

În această carte puteți găsi:

- metode pentru demonstrarea egalităților de mulțimi,
- metode pentru demonstrarea bijectivității funcțiilor,
- metode pentru studiul monotoniei șirurilor și funcțiilor,
- metode comune pentru calculul limitelor de șiruri și de funcții,
- metode specifice pentru calculul limitelor de șiruri,
- metode pentru studiul continuității și a derivabilității,
- metode pentru a determina existența rădăcinilor unei ecuații,
- aplicații ale teoremelor lui Fermat, Rolle, Lagrange, Cauchy,
- metode pentru demonstrarea unor egalități și inegalități,
- metode pentru a arăta că o funcție are primitive,
- metode pentru a arăta că o funcție nu are primitive,
- metode pentru a arăta că o funcție este integrabilă,
- metode pentru a arăta că o funcție nu este integrabilă.

Autorii sunt cadre didactice universitare cu o bogată experiență didactică și activitate științifică recunoscută pe plan internațional.

*

*   *

Comenzile le puteți face și cu plata ramburs, adresându-vă autorilor la C.P.811, Craiova (1100), Dolj.

Observațiile și sugestiile d-voastră le puteți trimite la aceeași adresă. Vă mulțumim.

ISBN: 973 - 96940 - 0 - 4